Segunda edición

Matemáticas V

Cálculo diferencial

Enfoque por competencias

René Jiménez

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Matemáticas V

Cálculo diferencial

Segunda edición

Manuel René Jiménez
Colegio de Bachilleres

ALWAYS LEARNING PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Jiménez, Manuel René

Matemáticas V. Cálculo diferencial
Segunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2011

ISBN: 978-607-32-0692-1

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 19 × 23.5 cm Páginas: 200

Dirección general: Laura Koestinger
Dirección K-12: Santiago Gutiérrez
Gerencia editorial: Rodrigo Bengochea
Coordinación editorial: Gloria Morales
Coordinación de arte y diseño: Ásbel Ramírez
Edición sponsor: Enrique Quintanar
e-mail: enrique.quintanar@pearson.com
Edición de desarrollo: Olga Sánchez
Corrección de estilo: Merari Fierro
Supervisión de arte y diseño: Yair Cañedo
Diseño de interiores: Daniela Torres
Iconografía: Olga Sánchez
Diagramación: Editec

Dirección K-12 Latinoamérica: Eduardo Guzmán Barros
Gerencia editorial Latinoamérica: Clara Andrade

SEGUNDA EDICIÓN, 2011

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-0692-1
ISBN E-BOOK: 978-607-32-0693-8
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0694-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 14 13 12 11

PEARSON

www.pearsoneducacion.net

Contenido

Presentación

El presente libro tiene como propósito presentar los temas elementales que contempla el programa de *Cálculo diferencial* para bachillerato. Tanto el contenido como su estructura están diseñados para cumplir con la propuesta nacional de la **Reforma Integral de la Educación Media Superior**. La finalidad es que el estudiante de este nivel adquiera una educación de calidad que le permita alcanzar las **competencias** necesarias para desarrollar la creatividad y el pensamiento lógico y crítico. Esto se logra mediante procesos de formación razonables, estructurados y perfectamente bien argumentados que implícitamente se reflejen en los *conocimientos*, *habilidades*, *actitudes* y *valores* los cuales le permitirán correlacionar la escuela con la vida cotidiana, además de allegarse de los recursos necesarios para continuar sus estudios profesionales.

Para estructurar el texto se ha tenido especial cuidado en que las actividades sean de corte constructivista, centradas en el educando y en los valores que le deben caracterizar.

El material aquí presentado es un gran apoyo didáctico para el personal docente que decida adoptarlo como texto, ya que cuenta al inicio de cada tema con situaciones didácticas detonantes del aprendizaje, para inmediatamente abordar los contenidos teórico-prácticos a manera de texto y cuaderno de trabajo; de tal forma que sea una opción significativa en su tarea de planeación, ejecución y evaluación de clase.

La presentación de los temas está organizada como sigue:

En el **Bloque 1** el estudiante se ubica y conoce los antecedentes históricos de esta rama de las Matemáticas y cómo su nacimiento ha contribuido a los grandes avances de la humanidad.

En el **Bloque 2** se busca que el estudiante resuelva problemas sobre límites en las ciencias naturales, económico-administrativas y sociales; mediante el análisis de tablas, gráficas y aplicación de las propiedades de los límites.

El **Bloque 3** está dedicado al estudio de la razón de cambio promedio e instantánea, el cambio de posición de un objeto en el tiempo y la interpretación geométrica de la derivada.

En el **Bloque 4** se trabaja sobre la obtención de máximos y mínimos absolutos y relativos y cómo ellos influyen en el éxito o fracaso de las producciones empresariales, industriales, agrícolas y en el comportamiento de los fenómenos naturales.

Sinceramente, mi mejor deseo es que esta obra sea una buena opción para que los estudiantes logren desarrollar y potencializar las competencias que agreguen valor a su desarrollo personal, académico y profesional; ya que esto será un excelente indicador para que el personal docente vea culminado su esfuerzo y su significativa misión educativa.

Éxito para todos y gracias por la confianza y la oportunidad de compartir esta propuesta educativa.

René Jiménez

Competencias

Las **competencias** son la integración de habilidades, conocimientos y actitudes que adquieren las personas con el propósito de resolver exitosamente las situaciones que se le presenten en un contexto determinado.

Competencias genéricas del bachillerato

Las competencias genéricas del bachiller se refieren a la capacidad de respuesta que éste tiene, las cuales le permiten comprender e influir en su entorno (local, regional, nacional e internacional), contar con herramientas básicas para continuar aprendiendo a lo largo de la vida, y convivir adecuadamente en sus ámbitos social, profesional, familiar, etcétera.

La presente asignatura tiene como propósito fundamental desarrollar en los estudiantes las siguientes competencias genéricas:

- Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
- Elige y practica estilos de vida saludables.
- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

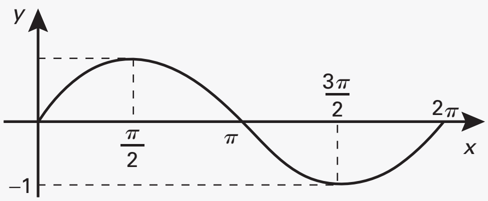
Competencias disciplinares extendidas

Se refieren al desarrollo académico del estudiante que le permite participar de forma activa en la sociedad del conocimiento y lo prepara para continuar así sus estudios superiores, tal como se enuncian a continuación.

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, graficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación diagnóstica

Encuentra la solución para cada una de las siguientes propuestas y anótala en la columna de la derecha.

Propuesta	Solución
1. Es una regla de dependencia entre dos variables de forma que una (*independiente*) define un y sólo un valor de la otra (*dependiente*).	
2. Conjunto de puntos que definen un lugar geométrico en las coordenadas cartesianas.	
3. ¿Cómo se define la gráfica de una función que es cortada sólo una vez por cualquier recta horizontal?	
4. Escribe la ecuación de la gráfica mostrada. 	
5. Si f es una función, escribe si la igualdad $f(x+y) = f(x) + f(y)$ es cierta o falsa.	
6. Escribe un ejemplo de una funcion racional.	
7. Escribe el nombre, el dominio y el rango de la función. $$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 5x - \frac{1}{2}$$	
8. Si $f(x) = x^2 - 2$ entonces el valor de $f(3)$ es:	
9. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $f(x) = 2$ entonces los valores de x son:	
10. Si $g(1) = 2$ calcula el valor de $g^{-1}(2)$.	

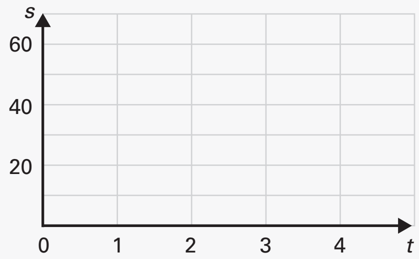
(*Continúa*)

(*Continuación*)

11. Encuentra el dominio de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

12. La distancia recorrida por un móvil está dada por los valores de la tabla.

t (segundos)	*s* (metros)
0	0
1	5
2	16
3	34
4	60



Usa los datos para trazar la gráfica de s como función de t y estima la distancia recorrida después de 3.5 segundos.

13. Supón que conoces la gráfica de $y=f(x)$. Describe cómo puedes obtener la gráfica de $y=f(x-1)+3$.

14. La población de una ciudad en el año 2000 era de 30,000 personas; si está creciendo 550 personas por año escribe un modelo algebraico para calcular la población en cualquier año posterior al 2000.

15. Estima el límite de la suma $Sn=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^n}$ cuando n crece indefinidamente.

16. Si $f(x)=\ln x$ y $g(x)=x^2-1$. Encuentra $(f\circ g)(x)$.

17. Encuentra el valor de $2e^3+\log 25$

18. Resuelve para x la expresión $e^x=5$

19. Determina si la función $y=x^3-2x$ es par o impar.

20. Determina si la función $f(x)=e^{-x}$ es creciente o decreciente.

Matemáticas V
Cálculo diferencial

BLOQUE 1

Antecedentes y evolución del cálculo

Desempeños del estudiante al concluir el bloque:

- Reconoces el campo de estudio del cálculo, destacando su importancia en la solución de modelos matemáticos aplicados a situaciones cotidianas.
- Relacionas los modelos matemáticos con su representación geométrica para determinar áreas y volúmenes en cualquier situación de tu vida cotidiana.

Objetos de aprendizaje

- Evolución del cálculo.
- Modelos matemáticos.

Competencias a desarrollar

- Construye e interpreta modelos matemáticos sencillos, mediante la aplicación de procedimientos aritméticos y geométricos.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos, mediante la evolución histórica del estudio del cálculo y los contrasta con su aplicación en situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con modelos matemáticos sencillos y con figuras geométricas observadas en su entorno.

Estrategias de enseñanza

- Proporcione diferentes lecturas de los trabajos realizados por Newton y Leibniz, destacando su importancia en la solución de modelos matemáticos aplicados en situaciones cotidianas.
- Diseñe un blog en Internet e integre un breve comentario sobre los antecedentes históricos del Cálculo diferencial y sus aplicaciones en la resolución de problemas del entorno.
- Solicite a los estudiantes realizar una lista de las figuras observables en su entorno inmediato y mediante una lluvia de ideas exponer al grupo la figura geométrica y el modelo matemático que representa su área.
- Dé instrucciones a los estudiantes para que en equipo construyan una caja sin tapa, realizando dobleces simétricos en las orillas de la hoja, se puede usar pegamento, para agregar algún material que permita la comparación y explicación de volúmenes como un primer acercamiento a los máximos y mínimos.
- Forme equipos de cuatro personas y explique los cambios sufridos en el paisaje, en la producción de cosechas, en los enseres domésticos, artículos electrónicos, entre otros y cómo el cálculo contribuyó al cambio.

Estrategias de aprendizaje

- Realiza en equipos el análisis de las lecturas proporcionadas por su profesor e identifica las aportaciones hechas por Newton y Leibniz al Cálculo diferencial; elaboran un tríptico en el que destacan la importancia de estas aportaciones y las ejemplifican con situaciones reales.
- Interactúa con el profesor y sus compañeros/as en el blog, aporta sus comentarios fundamentados en las lecturas realizadas y con base en las aportaciones de sus compañeros.
- Propone cuerpos y figuras geométricas comunes en su entorno y establece el modelo matemático que determina su área y volumen; por ejemplo el cilindro, el cono, la esfera, entre otras figuras; también relaciona los modelos matemáticos propuestos e identifica la figura geométrica correspondiente, finalmente explica los resultados obtenidos.

- Se organiza para trabajar en equipos y construir una caja sin tapa, realizando dobleces simétricos en las orillas de la hoja, se puede usar pegamento, para agregar algún material que permita la comparación y explicación de volúmenes. Hacer anotaciones de los resultados obtenidos para su análisis, destacando la importancia y significado del modelo matemático realizado.
- Argumenta la importancia del estudio del cálculo y su relación con hechos reales, a partir de la explicación que proporcionó su profesor.

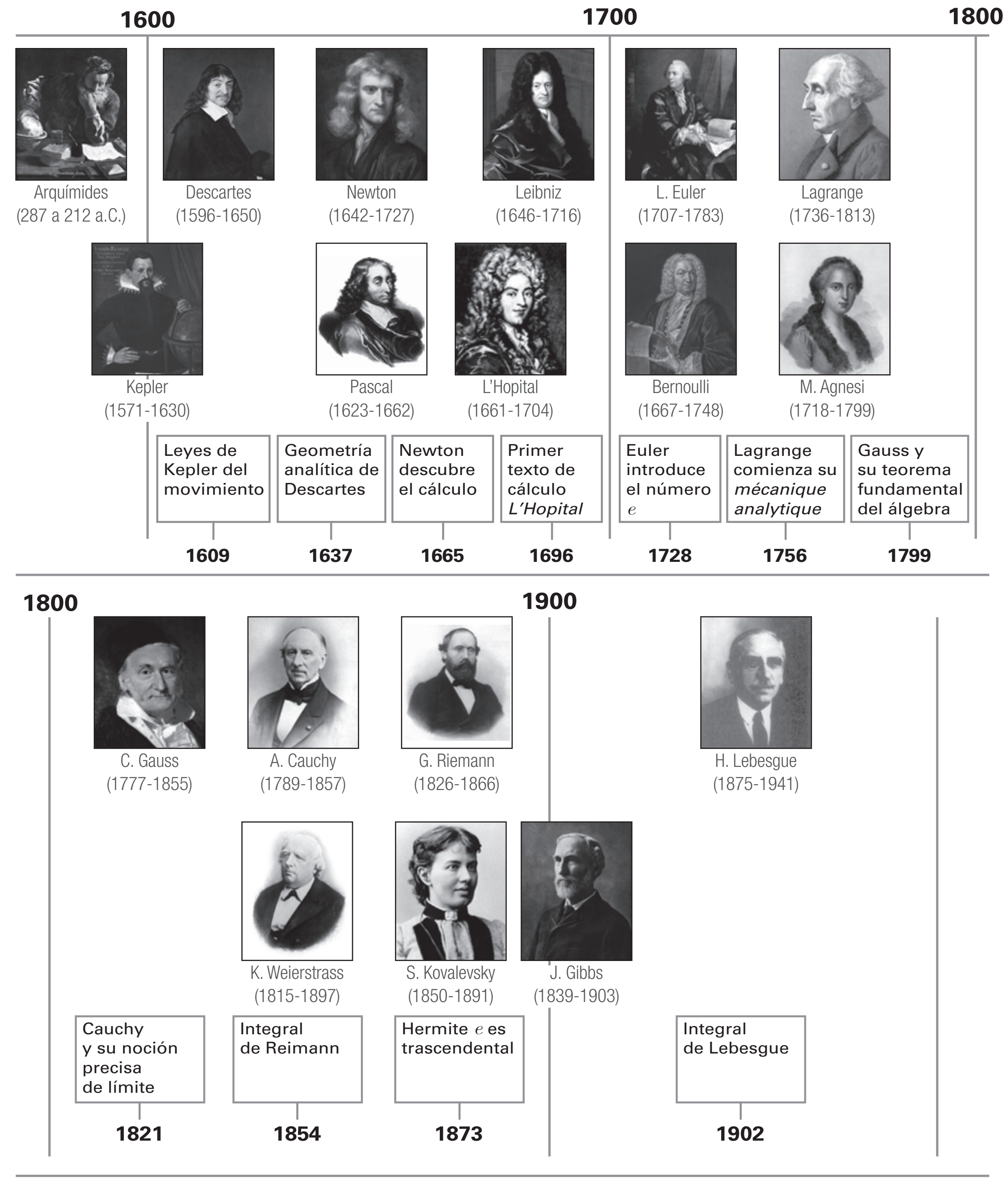
Antecedentes históricos del cálculo

Newton y **Leibniz** son considerados los descubridores del cálculo, pero su labor es el resultado de una ardua tarea iniciada muchos siglos antes. Ellos tomaron los *procedimientos infinitesimales* de sus antecesores (Barrow y Fermat), y les dieron la unidad algorítmica y la precisión y generalidad que se requería por ser un método novedoso, con lo que impulsaron su desarrollo. Tales estudios pudieron ser elaborados gracias a hombres visionarios como Torricelli, Cavalieri y Galileo, así como a Kepler, Valerio y Stevin. Los alcances que estos hombres lograron con las operaciones iniciales con infinitesimales, fueron a su vez resultado directo de las contribuciones de Oresme, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente, el trabajo de estos últimos tiene su base en problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras. Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe reconocerse que una de las contribuciones fundamentales y decisivas fue la *Geometría analítica* desarrollada independientemente por Descartes y Fermat.

Sin la contribución de éstos y de muchos otros hombres, el cálculo de Newton y Leibniz seguramente no hubiera tenido el desarrollo que hoy conocemos. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió la Europa del siglo XVII. Los nuevos métodos enfatizaron el trabajo empírico y la descripción matemática de nuestra *relación con la realidad*. La revolución científica supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa entre los siglos V y XV. Esta ruptura y salto en la historia del conocimiento fueron precedidos por las importantes transformaciones que se vivieron con el Renacimiento y la Reforma Protestante (durante los siglos XV y XVI). Así, el **Cálculo diferencial e integral** está inmerso en el tipo de conocimiento, cultura y sociedad de las que, esencialmente, somos parte.

El extraordinario avance registrado por la matemática, la física y la técnica durante los siglos XVIII, XIX y XX, se lo debemos al *Cálculo infinitesimal* y por eso se le considera como una de las riquezas de la creación intelectual de la que el hombre debe sentirse orgulloso.

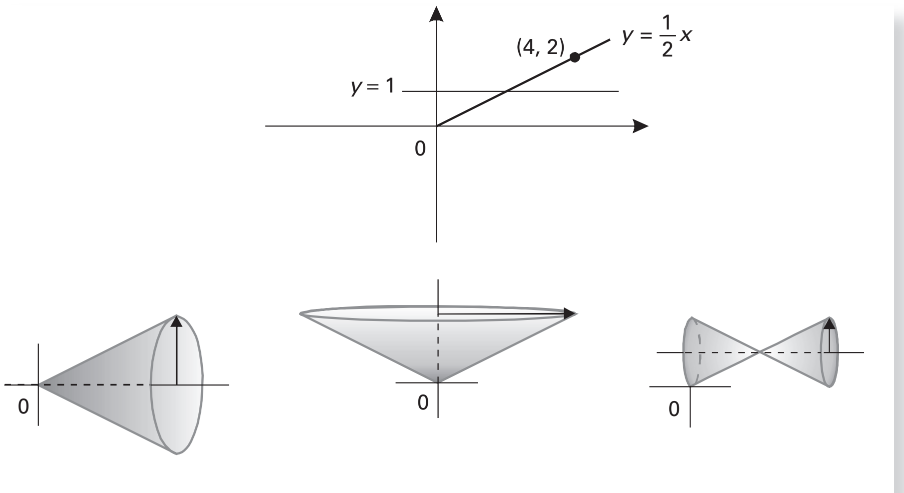
Contribuyentes al desarrollo del cálculo



Desarrolla tus competencias

En ciencia, siempre que se habla de *modelos matemáticos* en la vida real se está refiriendo a una función o relación que describe la dependencia entre cantidades variables. Resuelve las siguientes situaciones de aprendizaje significativo.

1. Si hacemos girar la recta $y = \frac{1}{2}x$ de la gráfica mostrada, alrededor de los ejes x, y y la recta $y = 1$ generamos los volúmenes de 3 conos diferentes. Identifica cada figura al revolucionar la región limitada por la recta, el punto de coordenadas (4, 2) y el origen. Calcula el valor numérico de cada uno de los volúmenes.



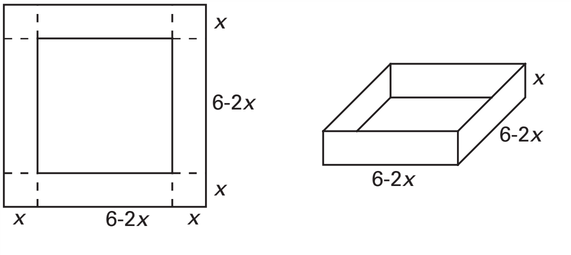
Secuencia didáctica

- El volumen de un cono se obtiene a partir de la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h$.
- Observa que a partir del origen y del punto de referencia de la recta (4, 2) puedes conocer el radio y la altura de cada cono.

Trabajo de investigación

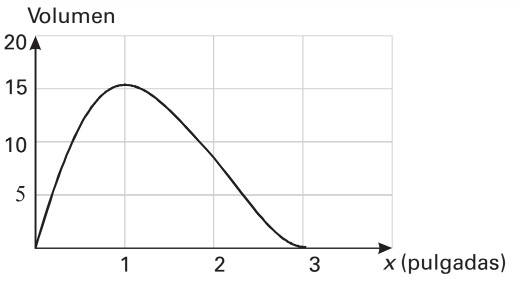
Consulta las trayectorias de **Isaac Newton** y **Gottfried W. Leibniz** y comenta con tu maestro y tus compañeros acerca de las aportaciones más significativas de ambos.

2. Se desea diseñar una caja cuadrada abierta por arriba, cortando cuadrados de lado x de las esquinas de una pieza de cartón que mide 6 por 6 pulgadas, como se muestra en la figura. Escribe un modelo, o expresión, para encontrar el volumen de la caja.



Secuencia didáctica

- Para escribir el modelo que calcula el volumen de la caja, observa la figura y recuerda que tienes que multiplicar el área de la base por la altura.
- Escribe el dominio y el rango del volumen de la caja.
- Calcula el volumen de 3 cajas diferentes para valores de $x = 1$, 2 y 3 pulgadas. Reflexiona con tus compañeros acerca de estos valores.
- La gráfica muestra el volumen de diferentes cajas para valores de x entre 0 y 3 pulgadas. De acuerdo con tu apreciación, ¿para qué valor de x el volumen de la caja es mayor?
- Analiza con tus compañeros el significado de la gráfica.



¿Qué estudia el cálculo?

La pregunta obligada en el estudio del presente curso es: ¿qué es el cálculo?

En tiempos del Imperio romano, el *calculus* era una pequeña piedra utilizada para contar y para apostar; este mismo significado se le da hoy en día en el lenguaje coloquial médico.

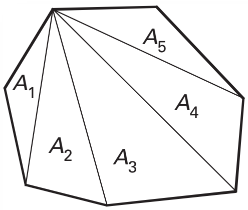
Siglos más tarde, *calculare* significaba calcular, contar o resolver. En la actualidad, en todos los campos del conocimientos, la palabra *cálculo denota una reformu-*

lación de las matemáticas elementales potenciadas con el concepto de límites, en otras palabras, el cálculo toma las ideas fundamentales de la matemática elemental y las extrapola a situaciones más generales; además el cálculo es más dinámico a diferencia de la matemática tradicional que es más estática. Por tal razón, el cálculo facilita el modelaje de procesos o fenómenos que se manifiestan a través de una *razón de cambio*. El siguiente cuadro muestra varios ejemplos de lo dicho anteriormente.

Matemática elemental	Cálculo	Matemática elemental	Cálculo
Pendiente de una recta	Pendiente de una curva	Movimiento a lo largo de una recta con velocidad constante	Movimiento a lo largo de una curva con velocidad variable
Recta tangente a una circunferencia	Recta tangente a cualesquier curva	Volumen de un sólido regular	Volumen de un sólido limitado por una superficie curva
Velocidad media	Velocidad instantánea	Aceleración media	Aceleración instantánea
Área de una región limitada por segmentos rectilíneos	Área de una región limitada por curvas	Área de la superficie de un cilindro	Área de la superficie de cualesquier sólido
Longitud de un segmento de recta	Longitud de una curva	Plano tangente a una esfera	Plano tangente a una superficie más general
Suma de una colección finita de números	Suma de una colección infinita de números	Centro de una esfera	Centro de gravedad de un sólido más general

Cálculo de áreas y volúmenes

Sin lugar a dudas, el problema del cálculo de áreas de figuras irregulares o curvas es lo que llevó a los antiguos griegos a utilizar el *método del agotamiento* hace por lo menos 2500 años. Esta técnica consistía en dividir el área A de un polígono en varios triángulos, como en la figura 1, y luego sumar las áreas de los triángulos resultantes.

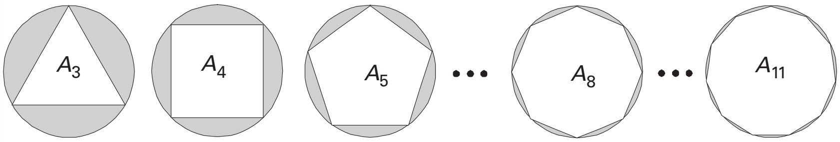


$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Figura 1

Está claro que era mucho más difícil obtener el área de una figura curva. En este caso, se utilizaba el *método de agotamiento* que consistía en inscribir y circunscribir polígonos en torno a la figura y a continuación hacer que el número de lados de los polígonos aumentara. La figura 2 muestra el método en el caso de un círculo, con polígonos regulares inscritos.

Figura 2



Observa hacia dónde tiende la diferencia entre las áreas del círculo y el polígono cuando el número de lados de este último crece indefinidamente.

Llamemos A al área del círculo y A_n al área del polígono inscrito con n lados. Al aumentar n de manera indefinida, parece que A_n se aproxima cada vez más al área del círculo. Decimos que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos y escribimos en forma simbólica:

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

La expresión anterior se lee:

El límite de A_n cuando n tiende al infinito es A.

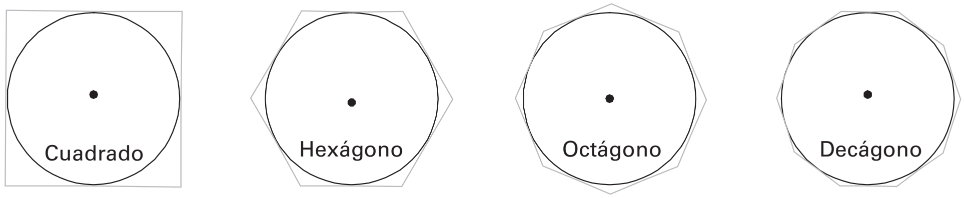
Es conveniente aclarar que los griegos no aplicaron explícitamente los límites, pero por medio del método del agotamiento pudieron probar la conocida fórmula del área del círculo: $A = \pi r^2$.

Potencializa tus competencias

Para reafirmar las ideas anteriores e introducirte al mundo del cálculo realiza las siguientes actividades:

1. Marca con un color azul el polígono sugerido en cada uno de los círculos mostrados y reflexiona sobre las siguientes preguntas:

- ¿Hacia dónde tiende el área del polígono a medida que el número de lados de éste aumenta indefinidamente?
- ¿Qué tanto se parecen el radio del círculo y la apotema del polígono cuando el número de lados del polígono es suficientemente grande para aproximarse al círculo?
- ¿Cómo encontraron los griegos la fórmula del área del círculo?

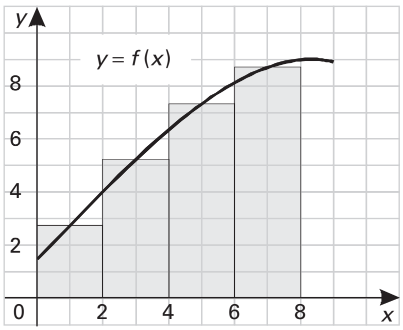


2. En cálculo, una de las formas más útiles para aproximar el área de figuras curvas es dibujar el mayor número posible de franjas rectangulares debajo de éstas y enseguida sumar las áreas de cada una de las regiones de los rectángulos.

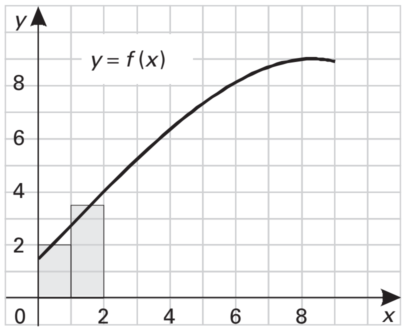
   a) Con los valores de f dados en la gráfica, aproxima el área sombreada debajo de la curva, sumando las áreas de los 4 rectángulos desde $x = 0$ hasta $x = 8$.

   b) Ahora encuentra la estimación del área de f dibujando 8 rectángulos.

   c) ¿Qué ocurre a medida que dibujas un gran número de rectángulos?

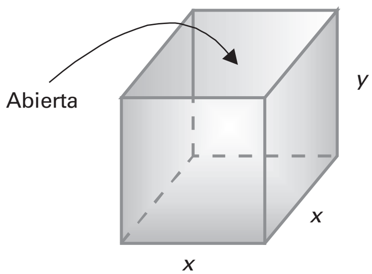


a)

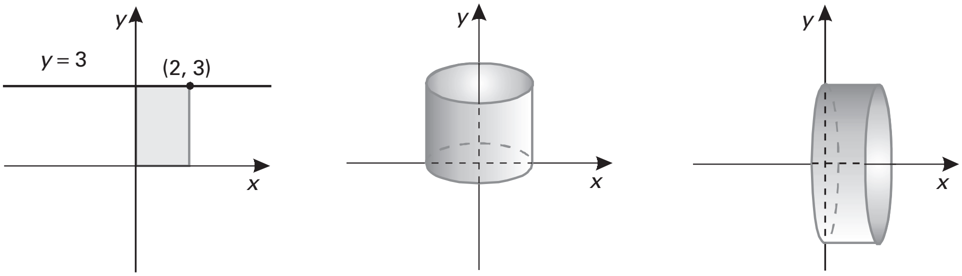


b)

3. Se desea conocer el costo de fabricar una caja rectangular abierta por arriba, cuya capacidad sea de 1 m^3, la base mida x^2 y la altura y. Escribe un modelo matemático para calcular dicho costo en función de x si el material de las paredes es de 5 pesos por metro cuadrado y de 10 pesos el metro cuadrado del fondo. (Ver figura).

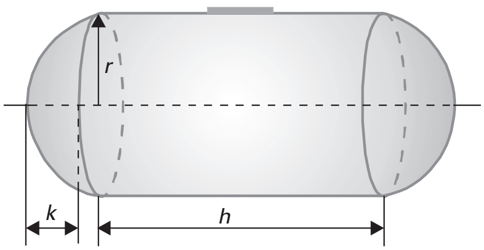


4. Dado el punto (2, 3) de la recta $y = 3$, y haciendo girar la región que está sombreada sobre el eje y y x, se generan los cilindros sólidos mostrados en la figura. Calcula el área exterior y el volumen de cada uno de ellos.



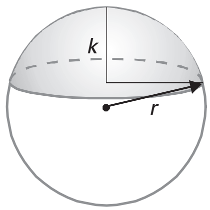
Área =	Área =
Volumen =	Volumen =

5. Un depósito de agua está formado por dos casquetes esféricos como tapas y por un cilindro de radio r y altura h. Calcula su volumen si el radio mide 0.5 metros, la altura 1 metro y la porción del radio k es 0.375 metros.

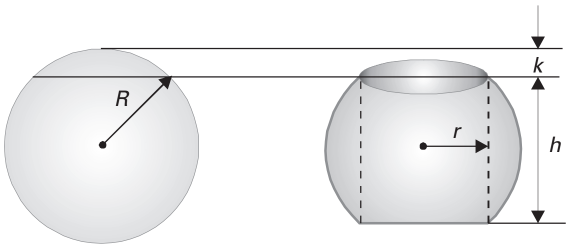


Casquete esférico: Parte de una esfera cortada por un plano. El volumen se calcula con la expresión:

$$V = \frac{\pi k^2}{3}(3r - k)$$

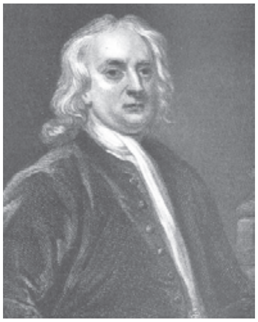


6. Supón que fabricas anillos para servilletas taladrando agujeros de radio r = 2.5 cm a través del centro de una esfera de madera de radio R = 4 cm. ¿Cuál es la cantidad de madera que sale de la perforación, si los anillos quedan con una altura de 6 cm? (Observa los casquetes y el orificio cilíndrico de la figura).



Definición de tangente

Los intentos por definir el concepto de *recta tangente* a una curva dieron como resultado la rama del cálculo que se llama **Cálculo diferencial**, y su desarrollo se presentó 2000 años después que el Cálculo integral. Las ideas fundamentales que sustentan al Cálculo diferencial se las debemos, entre otros, al matemático inglés Isaac Newton (1642-1727) y al matemático alemán Gottfriedd Leibniz (1646-1716).



Isaac Newton (1642-1727)
matemático inglés.

Gottfriedd Leibniz (1646-1716)
matemático alemán.

Considera la gráfica de la función $y = f(x)$ de la figura 3 y traza una recta secante por el punto fijo $P(x_p, y_p)$ y el punto móvil $Q(x_q, y_q)$ próximo a P; entonces, por definición, la pendiente m_{PQ} de la secante es:

$$m_{PQ} = \frac{y_q - y_p}{x_q - y_p}$$

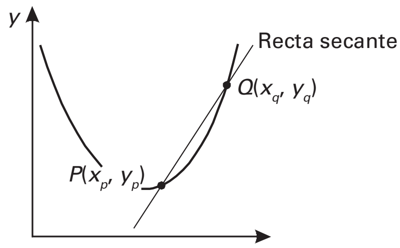


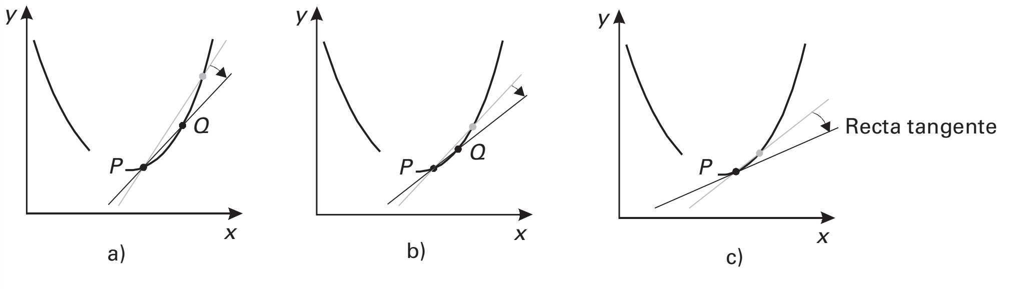
Figura 3

Pensemos ahora que el punto Q se mueve a lo largo de la curva de $f(x)$ acercándose a P. En la secuencia de la figura 4 se puede apreciar que la recta secante gira y se aproxima a la recta tangente como su posición límite. Esto significa que la pendiente m_{PQ} de la recta secante se acerca cada vez más a la pendiente m de la **recta tangente**; simbólicamente esto se escribe así:

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

La expresión anterior se lee: “m es el límite de m_{PQ} cuando Q tiende a P”.

Figura 4



Este análisis enseña que la pendiente m de la recta tangente es el límite de m_{PQ} cuando Q se acerca mucho a P. Por tanto, cuando x_q se acerca a x_p, podríamos usar también la ecuación $m = \lim\limits_{Q \to P} m_{PQ}$ como:

$$m = \lim_{x_q \to x_p} \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} \qquad \text{donde} \qquad m_{PQ} = \frac{y_q - y_p}{x_q - y_p}$$

Velocidad

Si comparamos la representación gráfica de la tangente de la sección anterior con el movimiento de un automóvil que se mueve en línea recta y graficamos los puntos correspondientes a la distancia recorrida como función del tiempo $d = f(t)$, después de t segundos la velocidad promedio en el intervalo $[a, t]$ es: (ver figura 5)

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

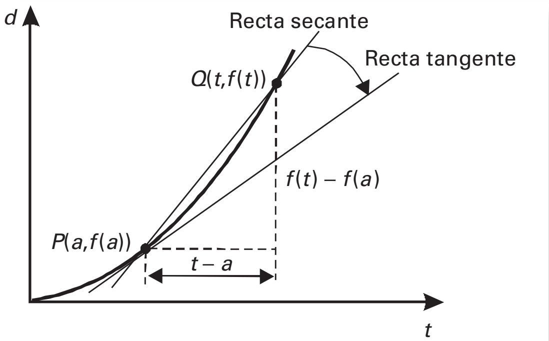


Figura 5

Lo cual nos lleva a concluir que es lo mismo que la pendiente de la recta secante de la figura 3. La velocidad cuando $t = a$ es el valor límite de la velocidad promedio cuando t se aproxima mucho a la abscisa a. Este límite se llama **velocidad instantánea** v y se representa por la expresión

$$v = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

En Cálculo diferencial, si resolvemos problemas de la tangente a una función, prácticamente también lo hacemos para situaciones referentes a *velocidades* o bien, *a otras razones de cambio*.

Límite de una serie

Piensa en un pastel circular que se consume de acuerdo con el siguiente patrón: el primer día se come la mitad, el siguiente la mitad de lo que queda, el tercer día de nuevo se consume la mitad de lo que queda y así sucesivamente. ¿Significa esto que nunca se terminará el pastel? (Observa la figura 6).

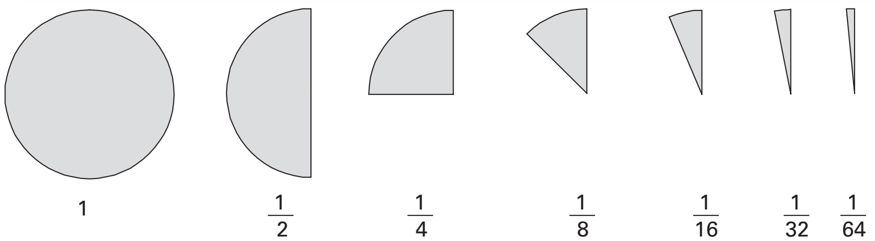


Figura 6

Queda claro que el pastel se va a terminar, pero teóricamente el experimento sugiere que si sumamos la infinidad de fracciones al ir seccionando lo que queda del pastel, la suma S_n queda como sigue:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

La experiencia anterior nos lleva a concluir que si el número de términos n es suficientemente grande, podemos aproximar la suma S_n tanto como se quiera al número 1 y que es razonable decir que la suma de la serie infinita es 1.

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$$

$$\vdots$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024} = 0.99902344$$

Así, conforme agregamos términos, la suma se aproxima cada vez más a 1.

Por tanto, la suma de la serie anterior se puede escribir de manera simbólica de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right) = 1$$

y de forma más compacta:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

la cual se lee como: "El límite de la suma infinita S_n cuando n tiende a infinito es 1".

Más adelante veremos que estas ideas básicas de límite son importantes para definir el Cálculo **diferencial e integral**.

Potencializa tus competencias

Para reafirmar las ideas anteriores e introducirte al mundo del cálculo realiza las siguientes actividades:

1. La distancia $s(t)$ en metros recorrida por un objeto que se deja caer en caída libre después de t segundos se puede encontrar con la expresión $s(t) = 4.9t$. Completa la siguiente tabla para determinar la distancia recorrida en los instantes indicados.

***t* en segundos**	4	4.1	4.01	4.001
***s*(*t*) en metros**				

Luego, la velocidad promedio del objeto en un intervalo de tiempo puede calcularse dividiendo la distancia recorrida por el objeto entre el tiempo transcurrido de una posición inicial a una posición final.

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Ahora calcula la velocidad promedio para cada intervalo de tiempo indicado en la tabla.

Intervalo de tiempo	$4 \leq t \leq 5$	$4 \leq t \leq 4.1$	$4 \leq t \leq 4.01$	$4 \leq t \leq 4.001$
Velocidad promedio				

- ¿Cuál parece ser el límite de la velocidad promedio cuando acortamos el periodo del intervalo?
- ¿Qué nombre recibe en física el límite de la velocidad promedio?

2. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies por segundo, la altura que alcanza en pies, después de t segundos, se expresa por $h(t) = 40t - 16t^2$.

a) Encuentra la altura alcanzada para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ segundos y dura: 0.5, 0.1, 0.01 y 0.001 segundos. Completa la tabla.

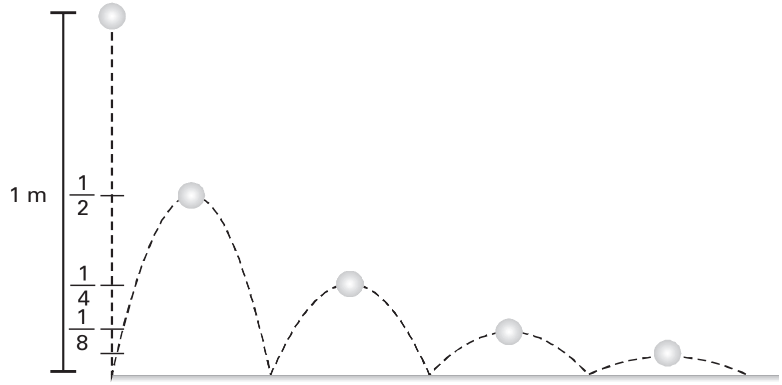
***t* en segundos**	2.5	2.1	2.01	2.001
***h*(*t*) en metros**				

b) Calcula la velocidad promedio para cada intervalo de tiempo indicado en la tabla.

Intervalo de tiempo	$2 \leq t \leq 2.5$	$2 \leq t \leq 2.1$	$2 \leq t \leq 2.01$	$2 \leq t \leq 2.001$
Velocidad promedio				

c) Encuentra la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

3. Una pelota se deja caer desde 1 metro de altura y cada vez que rebota lo hace hasta la mitad. Calcula el límite de la distancia total que recorre verticalmente después de haberla soltado, hasta quedar en reposo.



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 1

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

COMPETENCIAS A DESARROLLAR	
¿Al finalizar el bloque adquiriste las competencias que te permiten	
• construir e interpretar modelos matemáticos sencillos, mediante la aplicación de procedimientos aritméticos y geométricos?	
• explicar e interpretar los resultados obtenidos, mediante la evolución histórica del estudio del cálculo y los contrastaste con su aplicación en situaciones reales?	
• argumentar la solución obtenida de un problema, con modelos matemáticos sencillos y con figuras geométricas observadas en su entorno?	

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	
¿Al finalizar el bloque desarrollaste actividades que te permiten	
• realizar en equipos el análisis de las lecturas proporcionadas por tu profesor e identificaste las aportaciones hechas por Newton y Leibniz al cálculo diferencial y las correlacionaste con situaciones reales?	
• interactuar con el profesor y tus compañeros (as) en algún blog para aportar comentarios fundamentados en las lecturas realizadas y con base en las aportaciones de tus compañeros?	
• proponer una lista de cuerpos y figuras geométricas comunes en tu entorno y establecer el modelo matemático que determina su área y volumen y explicar los resultados obtenidos?	
• trabajar en equipos y construir alguna figura geométrica para hacer anotaciones de los resultados obtenidos para su análisis, destacando la importancia y significado del modelo matemático realizado?	
• argumentar la importancia del estudio del cálculo y su relación con hechos reales, a partir de la explicación que te proporcionó tu profesor?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.25. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

BLOQUE

2 Límites

El concepto de *límite* permitió el desarrollo y sustento de las ramas del cálculo, el Cálculo diferencial y el Cálculo integral.

Desempeños del estudiante al concluir este bloque:

- Aplicas el concepto de límite a partir de la resolución de problemas económicos administrativos, naturales y sociales de la vida cotidiana.
- Calculas límites a partir de la elaboración de gráficas en derive y la interpretación de las representaciones gráficas de funciones, mostrando tus habilidades en la resolución de problemas de situaciones cotidianas.

Objetos de aprendizaje

- El concepto de límite.
- Los límites y su interpretación en una tabla numérica.
- Los límites y su interpretación en una gráfica.
- El cálculo de límites en funciones algebraicas y trascendentes.

Competencias a desarrollar

En este bloque el estudiante

- Interpreta gráficas de funciones continuas y discontinuas analizando el dominio y contradominio y argumenta el comportamiento gráfico de la variable dependiente (y) los puntos (s) de discontinuidad.

- Explica e interpreta los valores de una tabla, calcula valores cercanos a un número y analiza el comportamiento en los valores de la variable dependiente en problemas de su entorno social, económico y natural.
- Explica e interpreta diferentes representaciones gráficas y determina límites que tienden a infinito positivo o negativo, a cero, límites laterales por la izquierda y por la derecha, y límites finitos de los objetos naturales que lo rodean.
- Argumenta la solución obtenida de un problema económico, administrativo, natural o social, mediante la teoría de límites.
- Valora el uso de las TIC´s en el modelado gráfico y algebraico de los límites para facilitar su interpretación y simulación en la resolución de problemas presentes en su contexto.
- Formula y resuelve problemas, a partir del cálculo del dominio y contradomino de las funciones algebraicas para determinar sus límites, demostrando su habilidad en la resolución de problemas algebraicos.
- Determina límites para funciones racionales, exponenciales, (exponente entero, fraccionario y negativo), logarítmicas y trigonométricas.

Estrategias de enseñanza

- Inicie con una proyección de fractales donde involucre procesos al infinito que modelan el mundo que nos rodea.
- Puede obtener información en las páginas:
  http://www.figueraspacheco.com/LBOTELLA/Geom/Fractals/fractals.htm#cons
  Con ayuda de un buscador, localice páginas relacionadas con Universos Fractales
- Solicite a los alumnos que expliquen e interpreten la paradoja de Zenón "Aquiles y la tortuga".
- Promueva las lecturas en Internet sobre el concepto y aplicaciones de los límites, ejemplo:
  http//www.calculo_en_una_variable/Limites-Wikilibros
- Propicie un ambiente dinámico y creativo donde se despierte la participación de los estudiantes para realizar ejercicios de límites.
- Para graficar promueva la utilización de software disponible de manera gratuita en Internet como: Winplot, GeoGebra, Derive, GraphMat, Pinacle.
- Promueva el trabajo colaborativo y cooperativo para que los estudiantes trabajen gráficas.

- Prepare presentaciones en PowerPoint sobre la resolución de problemas algebraicos y de funciones trascendentes situados en el contexto en el que se desarrolla el estudiante.

Estrategias de aprendizaje

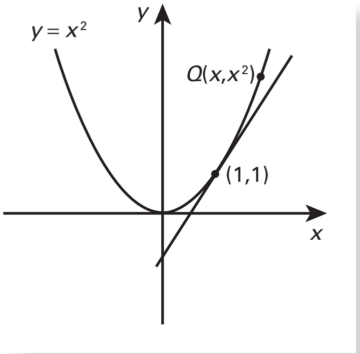
- Explica el concepto de límite y hace una puesta en común en hojas de rotafolio, retroalimenta entre sus compañeros/as el trabajo sobre las concepciones obtenidas individualmente y obtienen una conclusión grupal.
- Comenta en pares la paradoja de Zenón "Aquiles y la tortuga" y explica mediante una recta numérica la distancia recorrida por la tortuga y por Aquiles, destacando la importancia que tiene el realizar correctamente la interpretación gráfica y su uso en situaciones reales.
- Investiga en diferentes páginas de Internet información sobre el concepto y aplicación de límites, selecciona algunas lecturas y realiza un ensayo sobre su importancia e impacto que a la fecha tienen.
  http://www.prepa6.unam.mx/Colegios/Matematicas/.../Manuales/
  http://bibliotecavirtualeive.wordpress.com
- Traza o esboza funciones a partir de sus límites en lápiz y papel, comenta en pares las gráficas obtenidas y su interpretación.
- Elabora conclusiones sobre aprendizajes logrados en las gráficas de funciones con el Software Derive.
- Explica e interpreta diferentes representaciones gráficas y determina límites que tienden a infinito positivo o negativo, a cero, límites laterales por la izquierda y por la derecha, y límites finitos de objetos naturales que le rodean.
- Aplica, calcula y resuelve problemas de límites que involucren funciones trigonométricas, a partir de presentaciones en PowerPoint destacando su aplicación e importancia en cualquier situación cotidiana, proporciona ejemplos de situaciones reales.
- Menciona opiniones sobre los desempeños que logró durante el bloque, destacando las ventajas que tienen la información que se desarrolló durante el bloque en su vida cotidiana.

Tangente a una curva

En esta sección veremos cómo surgen los **límites** a partir de la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

Desarrolla tus competencias

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^2$ en el punto $P(1, 1)$. Recuerda que la ecuación de una recta es de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$ y se encuentra conociendo un punto y su pendiente.



Secuencia didáctica

- Necesitamos un punto y la pendiente de una recta para determinar su ecuación.
- Para calcular la pendiente m de una recta es necesario conocer dos de sus puntos.
- Como sólo conocemos el punto fijo $P(1, 1)$, entonces aproximamos la pendiente m de la recta tangente eligiendo un punto móvil $Q(x, x^2)$ de la función cercana a P y calculamos la pendiente m_{PQ} con la expresión,

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- Con la expresión anterior completa las celdas vacías de la siguiente tabla y concluye cuál es el valor de la pendiente m de la recta tangente.

x	$x^2 - 1$	$x - 1$	m_{PQ}	x	$x^2 - 1$	$x - 1$	m_{PQ}
1.5	1.25	0.5	2.5	0.5	–0.75	–0.5	1.5
1.1				0.9			
1.01				0.99			
1.001				0.999			

- Si calculaste correctamente los valores de m_{PQ} cuando x está muy próximo a 1, entonces es claro que la pendiente m de la recta tangente es 2.
- El experimento muestra que la pendiente de la recta tangente es el **límite** de las pendientes de las rectas secantes próximas al punto $P(1,1)$; este hecho se expresa simbólicamente así:

$$\lim_{x\to 1} m_{PQ} = m$$

- Ahora ya puedes expresar la ecuación de la recta tangente con la forma punto-pendiente que pasa por el punto $P(1,1)$ y tiene pendiente $m=2$.

$$y-1=2\left(x-1\right)$$

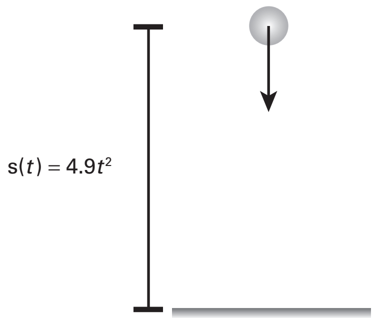
- Por último, observa cómo surge la idea de **límite** cuando tratamos de encontrar la tangente a una curva.

Velocidad instantánea

La misma idea de **límite** surge en las situaciones donde queremos calcular la velocidad de un objeto en un instante dado.

Ejemplo

La distancia $s(t)$ en metros recorrida por un objeto que se deja caer después de t segundos se puede encontrar con la expresión $s(t)=4.9t^2$. Determina la velocidad después de 4 segundos.



Respuesta
Debido a la dificultad que existe para hallar la velocidad exactamente en el instante $t=4$ segundos sin una fórmula, calculamos la distancia recorrida por el objeto en instantes muy próximos a 4.

t en segundos	4	4.1	4.01	4.001
$s(t)$ en metros	$4.9(4)^2=78.4$	82.369	78.7924	78.4392

La *velocidad promedio* del objeto en un intervalo de tiempo puede calcularse dividiendo la distancia recorrida por el objeto entre el tiempo transcurrido de una posición inicial a una posición final.

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Ahora calculamos la velocidad promedio para cada intervalo del tiempo indicado en la tabla.

Intervalo de tiempo	$4 \leq t \leq 5$	$4 \leq t \leq 4.1$	$4 \leq t \leq 4.01$	$4 \leq t \leq 4.001$
Velocidad promedio	$\frac{122.5 - 78.4}{1} = 44.1$	39.69	39.24	39.2

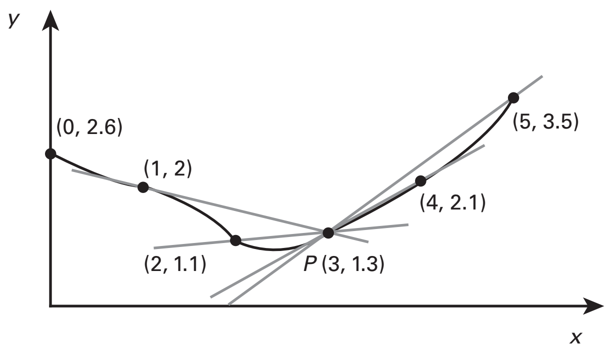
Lo que nos enseña la tabla es que conforme acortamos el periodo, la velocidad promedio se aproxima al **límite** 39.2 m/s. Este límite se llama **velocidad instantánea** del objeto cuando $t = 4$. Podemos decir entonces que la velocidad del objeto después de 4 segundos es:

$$v = 39.2 \text{ m/s}$$

Las situaciones anteriores de la *recta tangente* y de *la velocidad* de un objeto nos llevan a reflexionar en el concepto y el cálculo de los **límites**. Más adelante estudiaremos más ampliamente el concepto de límite y los métodos para su cálculo.

Evidencias de aprendizaje

1. La siguiente gráfica es producto de los datos de un experimento que definen a y como función de x.



a) Considera el punto $P(3, 1.3)$ y encuentra las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto con las abscisas $x = 1, 2, 4$ y 5.

b) Estima la pendiente de la recta tangente en P obteniendo el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes que pasan por los dos puntos conocidos y contiguos a P.

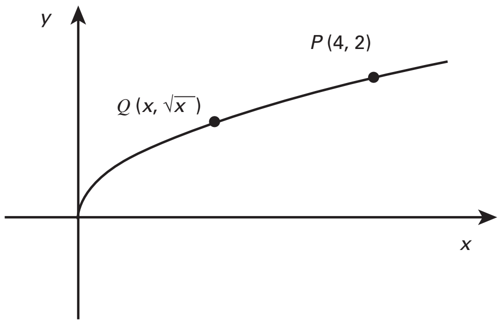
c) Estima la pendiente de la recta tangente en P.

2. La curva de la gráfica corresponde a la ecuación $y = \sqrt{x}$. Dado el punto $P(4, 2)$ y otro punto móvil $Q\left(x, \sqrt{x}\right)$, halla la pendiente de la recta secante PQ para los siguientes valores de x.

a) 3.5, 3.999, 4.001, 4.5

b) Con los resultados del inciso a) reflexiona y concluye cuál es la pendiente de la recta tangente en $P(4, 2)$.

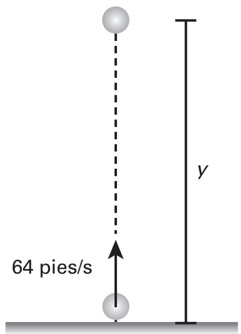
c) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(4, 2)$.



3. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 64 pies por segundo, la altura que alcanza en pies, después de t segundos, se expresa por medio de la ecuación: $y = 64t - 16t^2$.

a) Encuentra la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ y dura: 0.5 s, 0.1 s, 0.05 s, y 0.01 s.

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 2$ segundos?



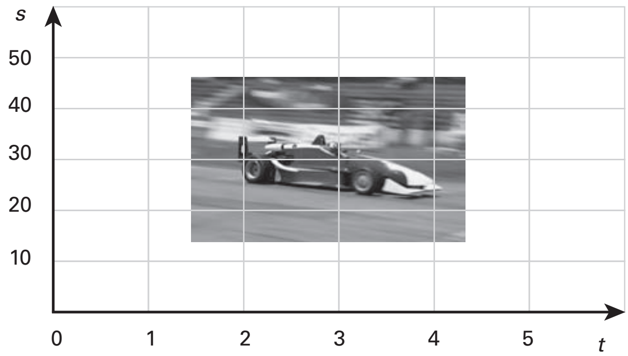
4. Los valores de la tabla anexa muestran la posición de un automóvil.

t **(segundos)**	0	1	2	3	4	5
s **(metros)**	0	3	10	21	36	54

a) Encuentra la velocidad promedio para el periodo que empieza cuando $t = 2$ y dura: 3 segundos, 2 segundos y 1 segundo.

Intervalo de tiempo	$2 \leq t \leq 5$	$2 \leq t \leq 4$	$2 \leq t \leq 3$
Velocidad promedio			

b) Traza la gráfica de *s* como función de *t* para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 2$.



Límite de una función

El concepto de límite en cálculo tiene prácticamente la misma connotación que en la vida cotidiana. En secciones anteriores tratamos la idea de los límites a partir de la tangente a una curva y la velocidad de un objeto; ahora estudiaremos con más precisión y extensión el concepto de límites y los métodos para calcularlos.

Consideremos la función $f(x) = 3 - x^2$ e investiguemos su comportamiento para valores de x próximos a 1. Observa la siguiente tabla.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.5	2.75000	1.5	0.75000
0.9	2.19000	1.1	1.79000
0.99	2.01990	1.01	1.97990
0.999	2.0019	1.001	1.99790

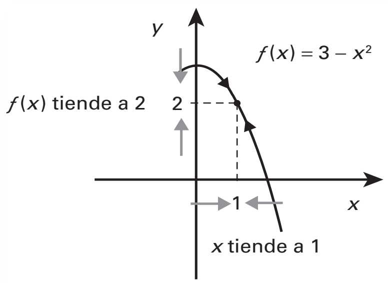


Figura 1

Si analizamos detenidamente la tabla y la gráfica de la parábola $f(x) = 3 - x^2$ que se muestra en la figura 1, es fácil concluir que cuando x se aproxima a 1 (*por la izquierda o por la derecha*), $f(x)$ lo hace hacia 2. Esta situación se expresa de la siguiente manera:

"El límite de la función $f(x) = 3 - x^2$, cuando x tiende a 1 es 2."

Y la expresión simbólica se escribe:

$$\lim_{x \to 1}\left(3 - x^2\right) = 2$$

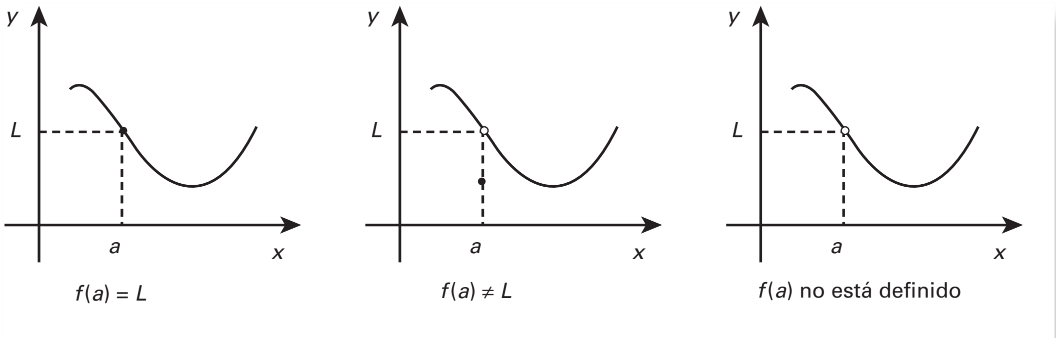
Definición

"El límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a (*por la izquierda o por la derecha*), es L ", si se pueden acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L, tanto como deseemos eligiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a. Esto lo escribimos de manera simplificada como

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = L$$

Es importante destacar que no es necesario que $f(x)$ esté definida cuando $x = a$. Lo que importa es cómo está definida $f(x)$ cuando x está cerca de a.

Observa las gráficas de las funciones de la figura 2 y comprueba que independientemente de lo que suceda en $x = a$, $\lim_{x \to a} f\left(x\right) = L$.



Límites de funciones polinomiales

Para encontrar el límite de una función polinomial basta con utilizar la siguiente regla básica de límites:

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = f\left(a\right)$$

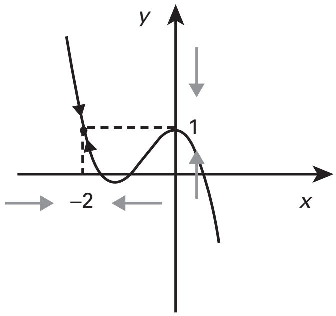
Ejemplo

Encuentra el valor de $\lim\limits_{x \to -2} \left(1 - 2x^2 - x^3\right)$.

Solución

Para encontrar el límite buscado, basta con evaluar la función $f(x)$ en $x = -2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \left(1 - 2x^2 - x^3\right) &= f(-2)\\ &= 1 - 2(-2)^2 - (-2)^3\\ &= 1 - 2(4) - (-8)\\ &= 1 - 8 + 8\\ &= 1\end{aligned}$$



Evidencias de aprendizaje

1. Calcula cada uno de los siguientes límites.

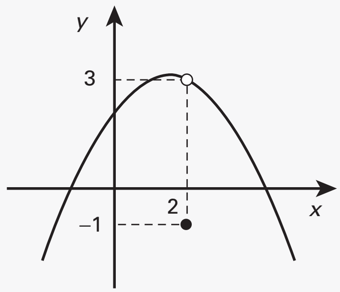
a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(2 - x^2 + x^3\right) =$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \left(2 + x^3\right) =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - x^2 + x^3\right) =$

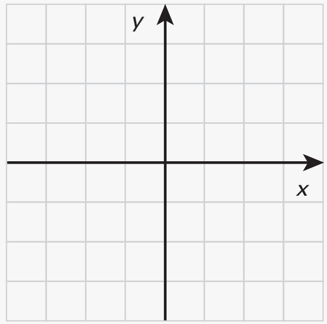
2. La gráfica de la figura corresponde a una función $f(x)$, analízala y contesta si es verdadero o falso que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

¿Es posible que se cumpla la expresión anterior y que $f(2) = -1$? Justifica tu respuesta.



3. Investiga, explica e ilustra con una gráfica qué significa:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$

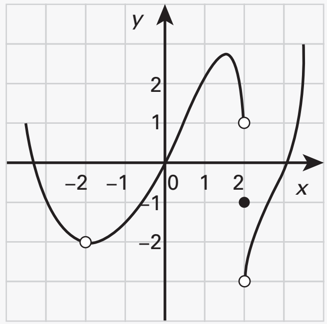


4. Dada la gráfica de la función f, escribe el valor de cada límite, si existe. Si no lo hay, explica por qué.

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$ $\qquad$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ $\qquad$ *d*) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ $\qquad$ *f*) $f(2) =$



Límites de funciones racionales

Cuando estudiamos una función racional de la forma $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ debemos tener en cuenta que $r(x)$ no está definida para $q(x) = 0$. (*Recuerda que la división entre cero es indefinida*.)

Sin embargo, en el cálculo de los límites eso puede ser trivial, ya que la definición de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dice que consideremos los valores de x cercanos a a pero diferentes de a.

Ejemplos

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+2}{x-2}$

Solución

Aunque la función no está definida para $x = 2$, sí lo está cerca de 0. Observa la gráfica de la figura 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x+2}{x-2} = f(0)$$

$$= \frac{3(0)+2}{0-2} = -1$$

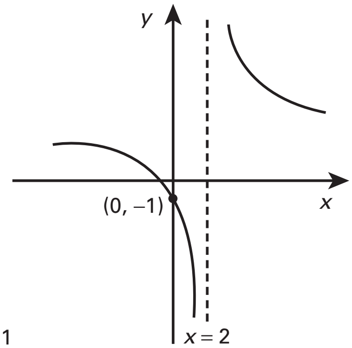


Figura 1

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^2}$.

Solución

Observa que la función $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^2}$, no está definida cuando $x = 1$, pero esto no tiene importancia porque lo que nos interesa es conocer el comportamiento de la función $f(x)$ cuando x esté próximo a 1. Analiza la siguiente tabla y comprueba que cuando x está próximo a 1 (*por la izquierda o por la derecha*), ocurre que,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=0.5$$

Por la izquierda de 1		Por la derecha de 1	
$x<1$	$f(x)$	$x>1$	$f(x)$
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750

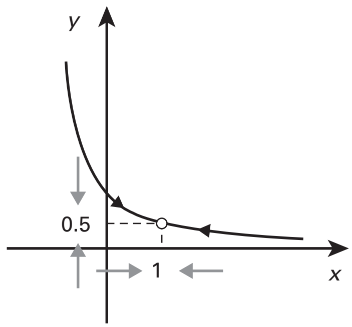


Figura 2

El ejemplo 2 podemos representarlo con la gráfica de la figura 2.

Solución analítica del ejemplo 2

Cuando en una función racional —como la del ejemplo 2— es posible utilizar una reducción algebraica elemental, es posible evitar el valor donde la función no está definida, y así calcular el límite directamente de la siguiente manera: factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}&=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{1-x}}{(1+x)\cancel{(1-x)}}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}\\&=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0.5\end{aligned}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

3. Encuentra el valor de $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$.

Solución

Como la funcion no está definida para $x = -2$ entonces factorizamos y reducimos la expresión racional

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2} &= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{x+2}}\\ &= \lim_{x\to -2}(x+3)\\ &= (-2+3) = 1\end{aligned}$$

Atención. Un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ es el resultado de multiplicar los binomios $(x + m)(x + n)$ donde $m + n = b$ y $mn = c$.

Por tanto, en $x^2 + 5x + 6$; $b = 5$; $c = 6$, luego dos números que sumados den 5 y multiplicados 6; son m y n respectivamente.

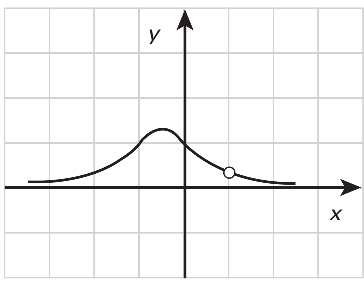
$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Evidencias de aprendizaje

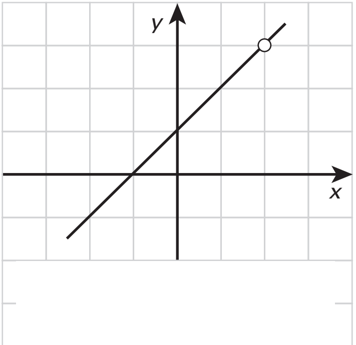
Trabajo colaborativo. En equipos de cuatro estudiantes resuelvan cada una de las situaciones siguientes.

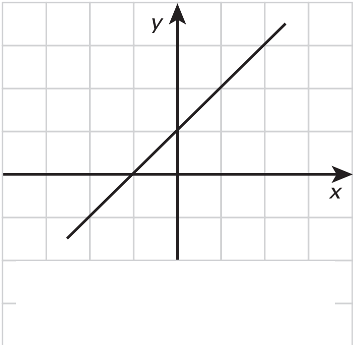
1. Utilicen evidencia numérica y la gráfica mostrada para conjeturar el valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$.

$x<1$	$\dfrac{x-1}{x^3-1}$	$x>1$	$\dfrac{x-1}{x^3-1}$
0.9		1.1	
0.99		1.01	
0.999		1.001	



2. Expliquen por qué la siguiente ecuación $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim(x+1)$ es correcta. Escriban la ecuación correspondiente a cada gráfica.





3. Utilicen álgebra elemental para evaluar cada uno de los siguientes límites, si existen. Si es así, escriban en la columna de la derecha el valor numérico del límite.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}=$	
b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=$	
c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-2)^2-4}{h}=$	
d) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]=$	
e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=$	

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} =$	
g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =$	
h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4} =$	
i) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3} =$	

Aplicaciones

1. Ciencias naturales. El desplazamiento de un automóvil que se mueve en línea recta se expresa con $s(t) = 16t + t^2$, donde t se mide en segundos y $s(t)$ en metros.

a) ¿Qué tan lejos viajará en 5 segundos?

b) Calcula $\lim\limits_{t \to 5} \dfrac{s(t) - s(5)}{t - 5}$

Solución

a) Para conocer el desplazamiento después de 5 segundos basta con evaluar $s(t)$ en $t = 5$.

$$s(5) = 16(5) + (5)^2 = 105 \text{ metros}$$

b) En este caso vamos a calcular $\lim\limits_{t\to 5}\dfrac{t^2+16t-s(5)}{t-5}$; pero como la función no está definida para t = 5, tenemos que recurrir a una factorización elemental,

$$\lim_{t\to 5}\frac{s(t)-s(5)}{t-5}=\lim_{t\to 5}\frac{t^2+16t-105}{t-5} \qquad \text{Sustituyendo } s(5) = 105$$

$$=\lim_{t\to 5}\frac{(t+21)(t-5)}{t-5} \qquad \text{Factorizando } t^2+16t-105$$

$$=\lim_{x\to 5}(t+21)=5+21=26 \ \text{ m/s}$$

Observa que escribimos m/s porque en el numerador las unidades son metros y en el denominador segundos. En realidad, obtuvimos la velocidad instantánea para t = 5 segundos.

2. **Economía.** El costo en pesos de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 0.5x^2 + x + 500$. Encuentra

a) El costo de producir 10 artículos. *b*) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{C(x)-C(10)}{x-10}$

Solución

a) Estamos buscando $C(10)$, por tanto

$$C(10) = 0.5(10)^2 + 10 + 500 = 560 \text{ pesos}$$

b) Calculemos ahora $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{C(x)-C(10)}{x-10}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 10}\frac{C(x)-C(10)}{x-10} &= \lim_{x\to 10}\frac{0.5x^2+x+500-560}{x-10}\\
&= \lim_{x\to 10}\frac{0.5x^2+x-60}{x-10}\\
&= \lim_{x\to 10}\frac{0.5(x^2+2x-120)}{x-10}\\
&= \lim_{x\to 10}\frac{0.5(x-10)(x+12)}{x-10}\\
&= \lim_{x\to 10}(0.5)(x+12)=0.5(10+12)=11 \text{ pesos/unidad.}
\end{aligned}
$$

Este límite de 11 pesos/unidad se conoce como *costo marginal* cuando se producen 10 artículos.

3. **Ciencias sociales.** El costo (en millones de dólares) de un gobierno para combatir la corrupción en x% está modelado por la expresión

$$C(x)=\frac{400x}{100-x}, \qquad 0\le x<100$$

a) Hallar el costo de combatir el 75 por ciento.
b) Hallar el límite de $C(x)$ cuando $x\to 100^-$.

Solución
a) En este caso calculamos $C(75)$

$$C(75)=\frac{400(75)}{100-75}=1200 \text{ millones de dólares}$$

b) Deseamos encontrar $\lim\limits_{x\to 100^-}\frac{400x}{100-x}$

$$\lim_{x\to 100^-}\frac{400x}{100-x}=\frac{400(99.99999)}{100-99.99999}=\infty$$

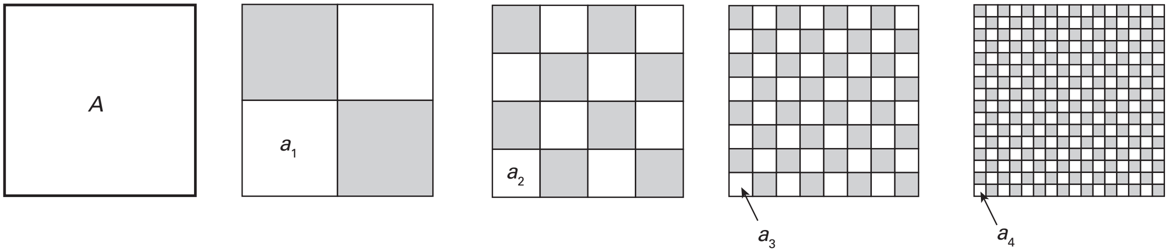
Autoevaluación

1. Para una mejor comprensión del concepto de límite, en el cálculo se recurre frecuentemente a los **fractales**. Los *fractales* son objetos demasiado irregulares para ser descritos en forma geométrica, cuya estructura básica, fragmentada o irregular se repite a diferente escala.

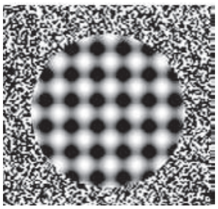
Analicemos el siguiente experimento: El cuadrado de la figura de enseguida y las figuras sucesivas son réplicas de éste, sólo que trazamos a partir de los puntos medios de sus lados otros cuadrados a diferente escala, y aumentamos cada vez más el número de ellos.

Con relación al experimento, sería pertinente contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Hacia dónde tiende el valor del área a_n cuando el número de cuadrados tiende al infinito ($a_n \to \infty$)?
b) ¿Cuál es el límite de la suma de las áreas $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, cuando n crece indefinidamente?
c) ¿Cuál es el límite del valor de la diferencia $|A - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)|$ cuando n crece indefinidamente?



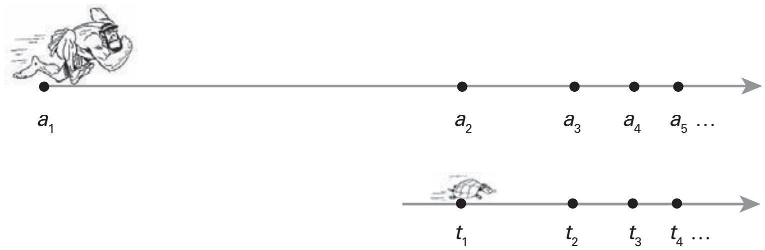
2. Observa con atención la siguiente figura y contesta la pregunta que viene al pie de ella.



¿Se está moviendo esta imagen?

Para familiarizarte más con este tema consulta: http://universos_fractales

Paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga. Refiere tal paradoja que Aquiles —llamado el de los pies ligeros— decide salir a competir una carrera contra una tortuga. Como él corre mucho más rápido que la tortuga, y está seguro de ganar, la da una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles está en la posición a_1, y la tortuga en la posición t_1. Cuando Aquiles llega a la posición $a_2 = t_1$, la tortuga ya no está, pues avanzó más lentamente hasta la posición t_2. Aquiles sigue corriendo, pero al llegar a la posición $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3 y así sucesivamente. De este modo, la pregunta obligada es: *¿Aquiles podrá en algún momento ganar la carrera?*



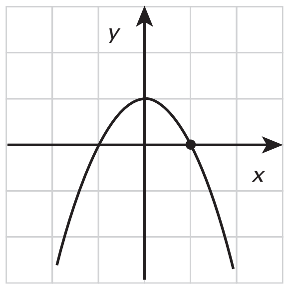
Evidencias de aprendizaje

Resuelve cada una de las situaciones propuestas a continuación.

1. **Geometría.** En secciones pasadas vimos que la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado se podía calcular con la expresión:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

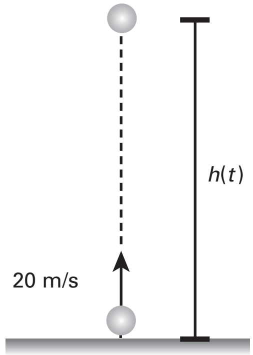
Calcula la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 1 - x^2$ en el punto (1, 0). Traza la recta tangente.



2. **Física.** Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 20 m/s, su altura (en metros) después de t segundos se expresa con $h(t) = 20t - 5t^2$. Encuentra:

a) Su altura cuando $t = 2$ segundos

b) $\lim_{t \to 2} \dfrac{h(t) - h(2)}{t - 2}$ y su significado.



3. **Contaminación.** Un grupo de estudiantes de bachillerato encontró que el costo (en pesos) de eliminar x% de la contaminación del aire arrojada por un complejo industrial, viene modelado por,

$$C(x) = \frac{1000000x}{100 - x} \qquad 0 \leq x < 100$$

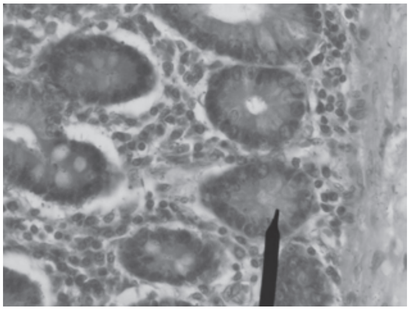
a) Halla el costo de eliminar un 90 por ciento.
b) Halla el límite $C(x)$ cuando $x \to 100^{-}$.

4. **Economía.** Una pequeña empresa ha encontrado que el costo (en pesos) de producir x artículos es $C(x) = 100 + 5x + x^2$. En relación con esta ecuación, encuentra:

a) El costo de producir 10 artículos.
b) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{C(x) - C(10)}{x - 10}$.
c) ¿Cuál es la interpretación del inciso (*b*)?

5. **Biología.** El volumen de una célula en forma esférica crece en función de su radio r de acuerdo con la expresión $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio se mide en micrómetros ($1\,\mu\text{m} = 10^{-6}$ m). Halla:

a) El volumen de la célula cuando $r = 5\mu\text{m}$, *b*) $\lim\limits_{r\to 5}\dfrac{V(r)-V(5)}{r-5}$.

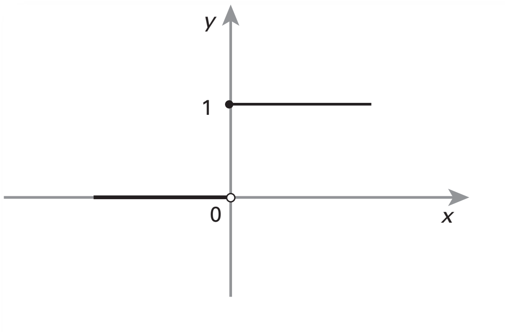


Límites laterales

En situaciones donde se estudian los circuitos eléctricos, con frecuencia aparece la función,

$$H(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ 1 & \text{si} \quad t\geq 0 \end{cases}$$

Esta función sirve para describir una corriente eléctrica que se hace circular en el instante $t=0$ y se llama *función de Heaviside*. La gráfica que le corresponde es la siguiente:



Lo que nos enseña la gráfica es que cuando t tiende a 0, también $H(t)$ se acerca a 0 por la izquierda. Pero cuando t se aproxima a 0 por la derecha la función $H(t)$ tiende a 1.

Simbólicamente esta situación la indicamos escribiendo:

$$\lim_{t\to 0^-} H(t)=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t)=1$$

La pregunta obligada es: ¿existe $\lim\limits_{t \to 0} H(t)$?

La respuesta es contundente, $\lim\limits_{t \to 0} H(t)$ *no existe* porque por la izquierda tiende a un valor y por la derecha a otro, para que exista, debe tender por ambos lados hacia el mismo valor numérico.

Cuando escribimos $t \to 0^-$ lo que significa es que los valores de t están a la *izquierda de cero*, es decir $t < 0$.

Cuando escribimos $t \to 0^+$ lo que significa es que los valores de t están a la *derecha de cero*, es decir $t > 0$.

Con esto concluimos que para exista el límite de una funcion $f(x)$ debe cumplirse lo siguiente:

Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Ejemplos

1. Encuentra $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ si es que existe.

Solución

Observa la tabla, cuando x se aproxima a 2^-, $f(x)$ se aleja rápidamente hacia el infinito negativo y cuando x se aproxima a 2^+, $f(x)$ se aleja rápidamente hacia el infinito positivo. Es decir, la función no tiende a un valor numérico de modo que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \qquad \text{no existe.}$$

Con la gráfica de la figura 1 podemos verificar el resultado de la tabla.

$x < 1$	$\dfrac{1}{x-2}$	$x > 1$	$\dfrac{1}{x-2}$
1.9	–10	2.1	10
1.99	–100	2.01	100
1.999	–1000	2.001	1000

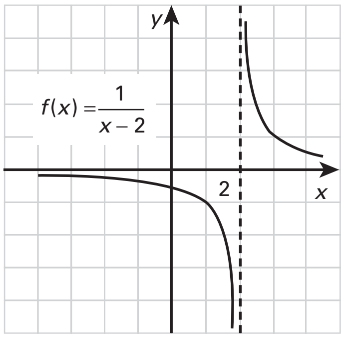


Figura 1

(*Continúa*)

(*Continuación*)

2. En la figura 2 se muestra la gráfica de una función $g(x)$. Obsérvala con atención y utilízala para encontrar los valores (si existen) de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ *d*) $\lim\limits_{x\to 6^-} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 6^+} g(x)$ *f*) $\lim\limits_{x\to 6} g(x)$

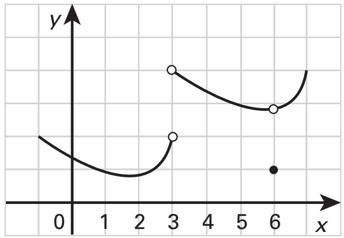


Figura 2

Solución

En la gráfica es fácil ver que cuando x tiende a 3 por la izquierda $g(x)$ tiende a 2, pero cuando x tiende a 3 por la derecha $g(x)$ lo hace hacia 4. Por lo tanto,

$$a)\ \lim_{x\to 3^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad b)\ \lim_{x\to 3^+} g(x) = 4$$

c) Como los límites de la función son diferentes cuando x tiende a 3 por la izquierda y por la derecha, concluimos que,

$$\lim_{x\to 3} g(x) \quad \text{no existe.}$$

La gráfica nos enseña que,

$$d)\ \lim_{x\to 6^-} g(x) = 2.9 \quad \text{y} \quad e)\ \lim_{x\to 6^+} g(x) = 2.9$$

f) Como la función tiende al mismo valor cuando x tiende a 6 por la izquierda o por la derecha; nos queda claro que,

$$\lim_{x\to 6} g(x) = 2.9$$

Evidencias de aprendizaje

1. Dada la gráfica de una función $f(x)$, obsérvala con atención y utilízala para encontrar los valores (si existen) de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

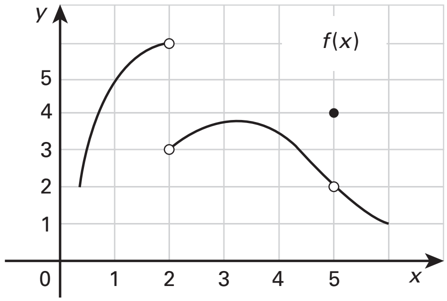
b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right) =$

d) $\lim\limits_{x\to 5^-} f\left(x\right) =$

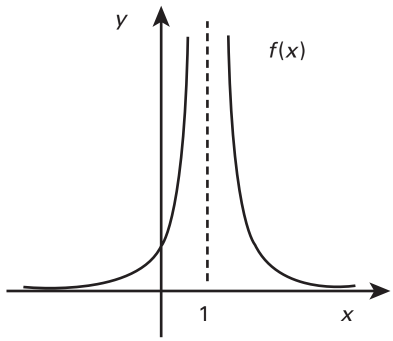
e) $\lim\limits_{x\to 5^+} f\left(x\right) =$

f) $\lim\limits_{x\to 5} f\left(x\right) =$



2. Completa la tabla y utiliza la gráfica de la función $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$ para conjeturar si existe $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$. Si no existe explica por qué.

$x < 1$	$\dfrac{1}{(x-1)^2}$	$x > 1$	$\dfrac{1}{(x-1)^2}$
0.9		1.1	
0.99		1.01	
0.999		1.001	

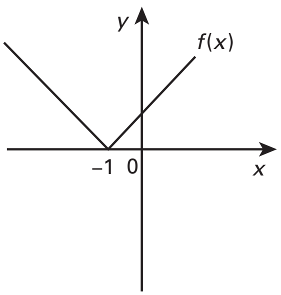


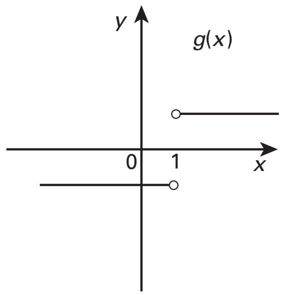
3. Se dan las gráficas de las funciones $f\left(x\right) = \left|x+1\right|$, $g\left(x\right) = \dfrac{\left|x-1\right|}{x-1}$ y $h\left(x\right) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\left|x\right|}\right)$. Encuentra los siguientes límites si existen. Si no los hay, explica por qué.

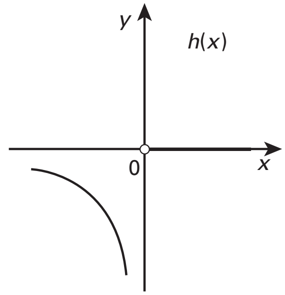
a) $\lim\limits_{x\to -1} \left|x+1\right| =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left|x-1\right|}{x-1} =$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\left|x\right|}\right) =$







4. Dados $F(x)$ y su gráfica, evalúa y escribe el valor de cada uno de los siguientes límites, si existen.

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) =$

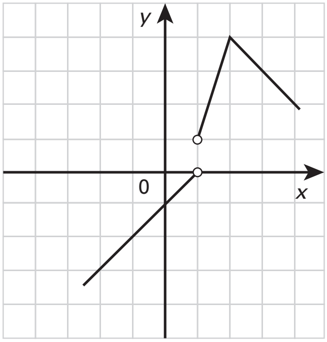
c) $\lim\limits_{x \to 1} F(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x) =$

e) $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x) =$

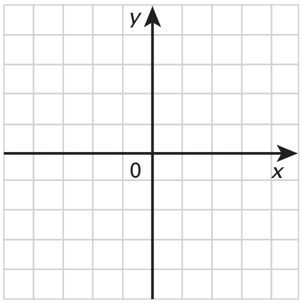
f) $\lim\limits_{x \to 2} F(x) =$

$$F(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ 6-x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$



5. Dado $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x-1}$, evalúa y escribe el valor de los siguientes límites, si existen. Traza su gráfica.

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$ *b*) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$ *c*) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$



Límites de funciones que se tienen que racionalizar

Ejemplos

1. Encuentra $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución con aproximaciones numéricas

Cuando una función no está definida para uno o más valores, la manera más amigable de conocer si un límite existe es utilizar las tablas de aproximación numérica que hemos utilizado hasta ahora; existen casos excepcionales en que no nos conducen a la respuesta correcta pero éstos no los trataremos aquí.

$x < 1$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$	$x > 1$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
0.9	1.948683	1.1	2.048809
0.99	1.994987	1.01	2.004988
0.999	1.999500	1.001	2.000500

La tabla nos muestra claramente que $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$

Racionalizar. Proceso mediante el cual transformamos una fracción que tiene un numerador o denominador irracional en una fracción equivalente con numerador o denominador racional según convenga.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cuando la expresión que se va a racionalizar es un binomio, se multiplica y se divide por su conjugado.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right] = \frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x}+1$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Solución analítica

Otra opción para encontrar $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ es racionalizar la función utilizando el álgebra elemental.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{1}+1\right) = 2$$

2. Encuentra $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\left[\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(x)}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{0+1}+1\right) = 2$$

Evidencias de aprendizaje

Resuelve cada límite y escribe en la celda de la derecha si la igualdad es verdadera o falsa.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{1}{4}$	
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$	
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-1}=-2$	

Límites de funciones trascendentes

Ejemplos

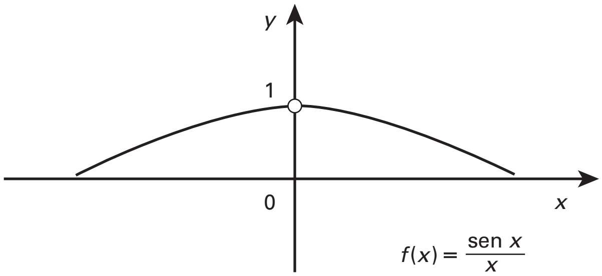
1. Encuentra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Solución
Queda claro que la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero podemos construir una tabla para valores próximos a 0. Recuerda que cuando calculemos *senx*, la calculadora debemos instalarla en la modalidad de radianes.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$x < 0$	$\frac{\text{sen } x}{x}$	$x > 0$	$\frac{\text{sen } x}{x}$
-0.1	0.99833417	0.1	0.99833417
-0.01	0.99998333	0.01	0.99998333
-0.001	0.99999983	0.001	0.99999983



Podemos conjeturar entonces que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$. Observa la gráfica.

2. Encuentra $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{100} + x^2\right)$.

Solución

Podemos construir una tabla como lo hemos hecho anteriormente, sin embargo, es fácil darse cuenta que al evaluar la función directamente en $x = 0$ queda perfectamente definido el límite buscado.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{1000} + x^2\right) = f(0) = \frac{\cos\left[2(0)\right]}{1000} + (0)^2 = \frac{1}{1000} + 0 = 0.001$$

Cálculo de límites utilizando las leyes de los límites

Hasta ahora hemos utilizado las tablas, las gráficas y las calculadoras para calcular los límites de las funciones; sin embargo, estos métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. También vimos en algunos casos que el cálculo de límites se puede hacer de manera analítica utilizando el álgebra elemental; para tal caso considera las siguientes reglas básicas de los límites.

Leyes de los límites

Suponemos que c es constante y que existen los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

2. $\lim_{x\to a}\left[cf(x)\right] = c\lim_{x\to a} f(x)$

3. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

4. $\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

En el lenguaje cotidiano las leyes anteriores pueden expresarse como sigue:

1. El límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es $f(a)$.
2. El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función.
3. El límite de suma o la diferencia es la suma o diferencia de los límites.
4. El límite del producto es el producto de los límites.
5. El límite del cociente es el cociente de los límites.

Ejemplos

Evalúa los siguientes límites.

1. Encuentra $\lim_{x\to 3}\left(2x^3 - 3x - 5\right)$.

Solución

$\lim_{x\to 3}\left(2x^3 - 3x - 5\right) = \lim_{x\to 3}\left(2x^3\right) - \lim_{x\to 3}\left(3x\right) - \lim_{x\to 3}\left(5\right)$ Utilizando la ley 3.

$= 2\lim_{x\to 3}\left(x^3\right) - 3\lim_{x\to 3}\left(x\right) - \lim_{x\to 3}\left(5\right)$ Utilizando la ley 2.

$= 2\left(3\right)^3 - 3\left(3\right) - 5 = 40$ Utilizando la ley 1.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

2. Encuentra $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4-2x+x^2}{3x-1}$.

Solución

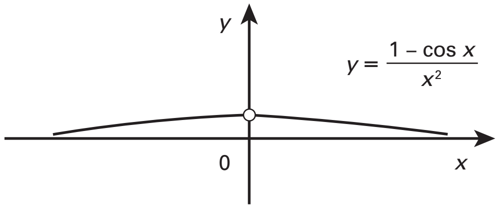
$$\lim_{x\to 5}\frac{4-2x+x^2}{3x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 5}(4)-2\lim\limits_{x\to 5}(x)+\lim\limits_{x\to 5}(x^2)}{3\lim\limits_{x\to 5}(x)-\lim\limits_{x\to 5}(1)}$$ Utilizando las leyes 5, 3 y 2.

$$=\frac{4-2(5)+(5)^2}{3(5)-(1)}=\frac{19}{16}$$ Utilizando la ley 1.

Evidencias de aprendizaje

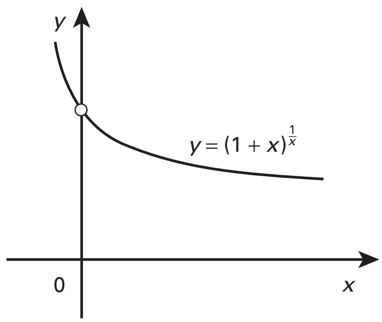
1. Completa la tabla y utiliza la gráfica para conjeturar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$x<0$	$\dfrac{1-\cos x}{x^2}$	$x>0$	$\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
-0.1		0.1	
-0.01		0.01	
-0.001		0.001	



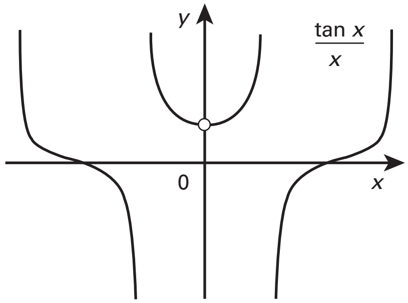
2. Completa la tabla y utiliza la gráfica para conjeturar $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

$x<0$	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$x>0$	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.01		0.01	
-0.0001		0.0001	
-0.000001		0.000001	



3. Completa la tabla y utiliza la gráfica para conjeturar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

$x < 0$	$\dfrac{\tan x}{x}$	$x > 0$	$\dfrac{\tan x}{x}$
-0.1		0.1	
-0.01		0.01	
-0.001		0.001	



4. Calcula los siguientes límites haciendo uso de las leyes de los límites y escribe el resultado en las celdas de la columna derecha.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(3-2x+x^3\right)=$	
b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\sqrt{9-x^2}=$	
c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x+1}{x-2}=$	
d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x+1)(x-1)=$	
e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{2^x}{100}\right)=$	
f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{2^x}{100}\right)=$	

5. Dados los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 8 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 0$$

Encuentra los límites que existan. Si el límite no existe explica por qué.

a) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+h(x)\right]=$	*b*) $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{g(x)}=$
c) $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=$	*d*) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{h(x)}$
e) $\lim_{x\to a}\left[f(x)-h(x)\right]=$	*f*) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-h(x)}{g(x)}=$

Continuidad

En matemáticas, el término continuidad significa lo mismo que en el lenguaje cotidiano. Decir que una función f es continua en $x = a$ debe entenderse como que su gráfica no sufre interrupción en a, que no se rompe ni tiene saltos o huecos. Por ejemplo, en la figura 1 se muestran 3 valores de x en los que la función no es continua.

En los demás puntos del intervalo (A, B) la gráfica no se interrumpe y decimos que la función es continua en ellos. Para que una función sea continua en $x = a$ se requieren tres cosas:

1. $f(a)$ está definido.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

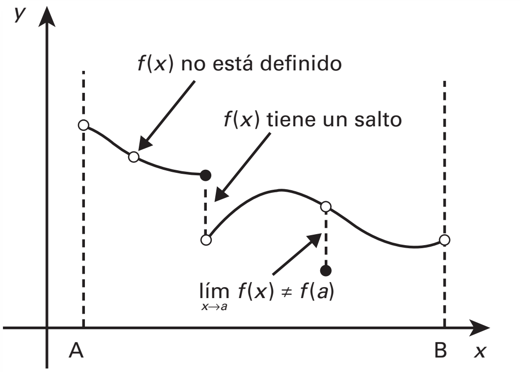


Figura 1

Continuidad en un intervalo: Una función f es continua en un intervalo (A, B) si es continua en todo número del intervalo.

Ejemplo

1. Determina si cada una de las siguientes funciones son continuas; en caso contrario escribe los puntos de discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

c) $g(x)=[\![x]\!]$

Solución

a) Es obvio que la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x=1$.

b) La función no está definida en $x=0$ y, además, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ no existe.

c) La función mayor entero $g(x)=[\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros ya que $\lim\limits_{x\to n}[\![x]\!]$ no existe si n es un entero.

En la figura 2 se muestran las gráficas del ejemplo anterior para corroborar las afirmaciones de discontinuidad.

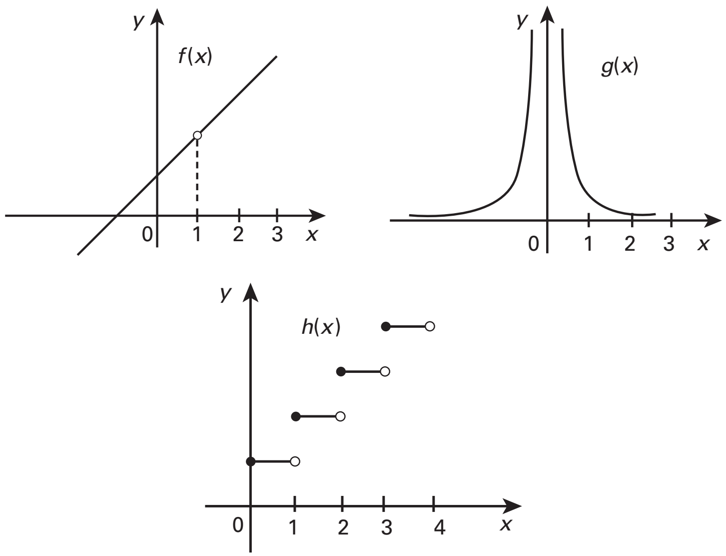
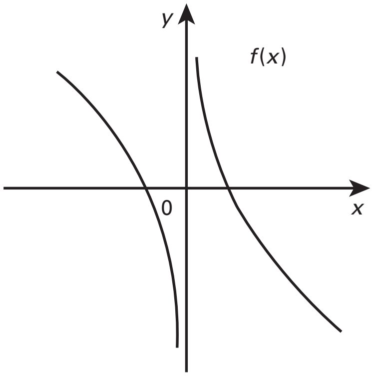


Figura 2

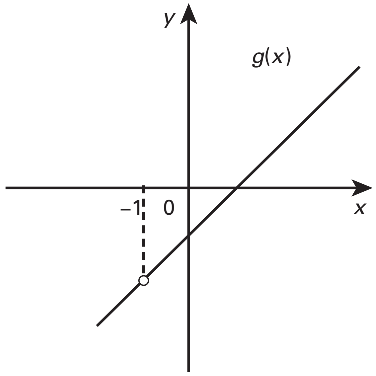
Evidencias de aprendizaje

1. Utiliza la gráfica y escribe los puntos de discontinuidad, si los hay, en el dominio de cada función.

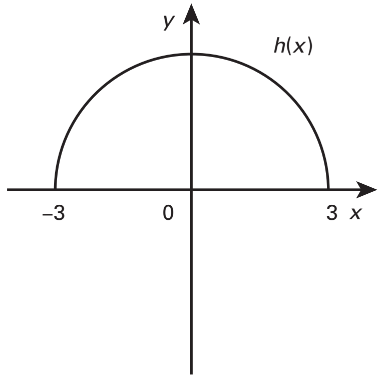
a) $f\left(x\right)=\dfrac{1-x^2}{x}$



b) $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

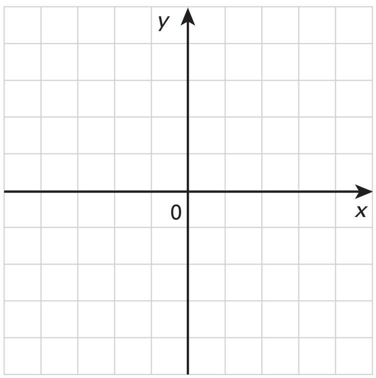


c) $g\left(x\right)=\sqrt{9-x^2}$

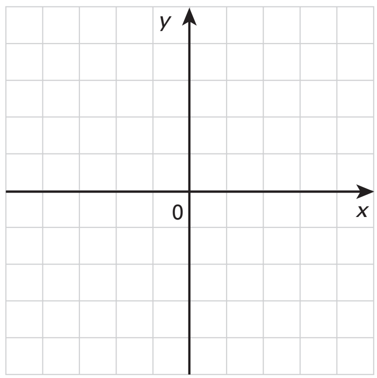


2. Determina si cada función es continua; en caso contrario indica en qué punto son discontinuas. Dibuja su gráfica.

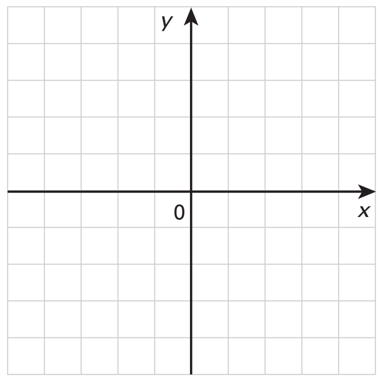
a) $f\left(x\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x}$



b) $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}$

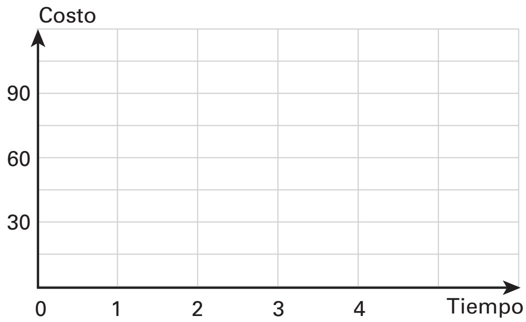


c) $g\left(x\right)=\dfrac{\left|x\right|}{x}$

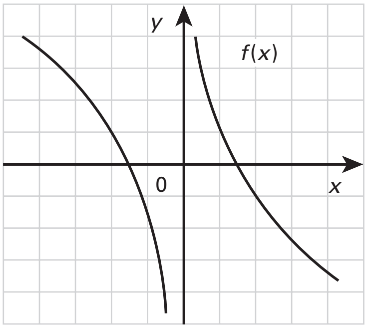


3. En un lote de estacionamiento se cobran \$30 por la primera hora (o fracción) y \$15 por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo de \$90.

Grafica el costo de estacionar un automóvil, como función del tiempo que permanezca aquí.



4. Con ayuda de la gráfica adjunta determina cada uno de los límites pedidos para $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$.



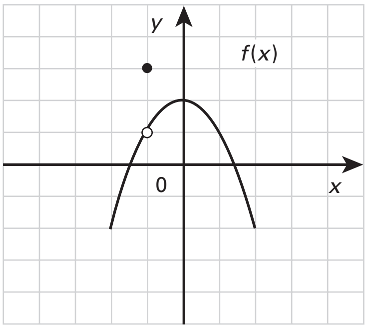
a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$

5. Explica cuáles de las condiciones de continuidad no se cumplen en la función $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{para} \quad x\neq -1 \\ 3 & \text{para} \quad x=-1 \end{cases}$$



Límites que comprenden el infinito

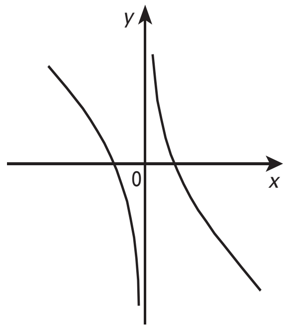
Límites infinitos

En esta sección vamos a estudiar cómo se comportan las funciones en puntos donde no están definidas y que sus gráficas tienden a parecerse a rectas verticales u horizontales (*asíntotas*).

Por ejemplo, si investigamos la función $y = \frac{1-x^2}{x}$ cuando x tiende a 0, es evidente que el límite en ese punto no existe. Observa la tabla y la gráfica.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{x} \text{ no existe}$$

$x<0$	$\frac{1-x^2}{x}$	$x>0$	$\frac{1-x^2}{x}$
-0.1	-9.99	0.1	9.99
-0.01	-99.99	0.01	99.99
-0.001	-999.999	0.001	999.999



En la gráfica se puede apreciar que,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-x^2}{x} = -\infty \qquad \text{y que} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^2}{x} = +\infty$$

En general, cuando ocurre este tipo de comportamiento, podemos usar la notación,

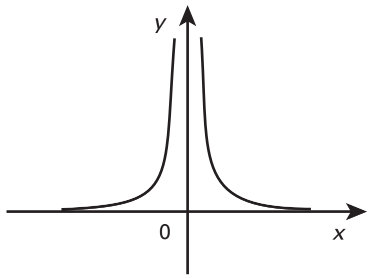
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{x} = \infty$$

para indicar que el límite no existe.

Ejemplo. Encuentra $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$. Traza la gráfica.

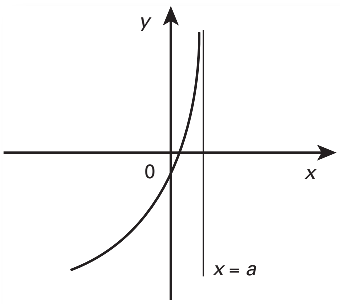
Solución
Por la forma de la expresión es fácil concluir que este límite no existe.
Escribimos entonces

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\infty$$

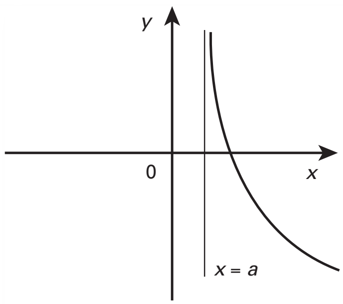


Asíntotas verticales

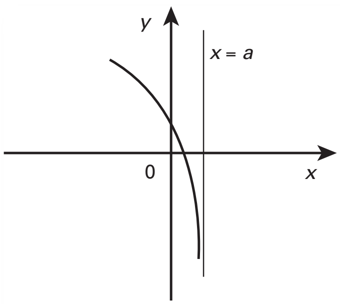
Una recta vertical $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si ocurre cualquiera de las siguientes situaciones.



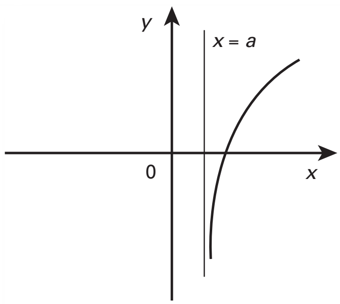
a) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$



b) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$



c) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



d) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Ejemplos

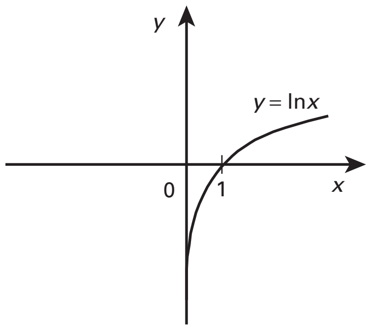
1. Encuentra $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)$

Solución

La gráfica de $y = \ln x$ nos muestra que cuando $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty\ .$$

Por tanto, el eje y es una asíntota vertical.



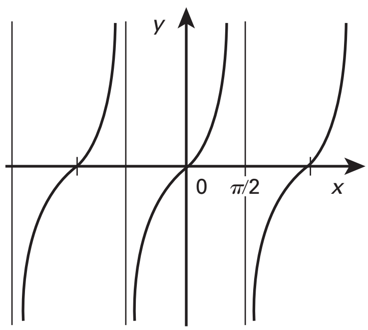
2. Encuentra $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+}(\tan x)$

Solución

La gráfica de $y = \tan x$ nos muestra que cuando $x \to \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+$

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+}(\tan x) = -\infty$$

Por tanto, la recta $x = \dfrac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical.



Evidencias de aprendizaje

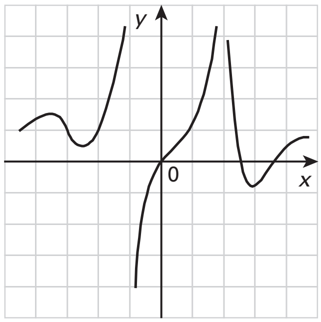
1. Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$, ¿qué significa $x = 2$?

2. Si $y = f(x)$, cuya gráfica se ilustra, calcula los siguientes límites, y si hay asíntotas verticales escribe sus ecuaciones.

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$



3. Encuentra los siguientes límites y para comprobar tus resultados grafica en computadora la función.

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1} =$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1} =$

4. Encuentra los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^3} =$	*b*) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-1}{x(x-2)} =$
c) $\lim\limits_{x \to \pi} \csc x =$	*d*) $\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) =$

Límites en el infinito

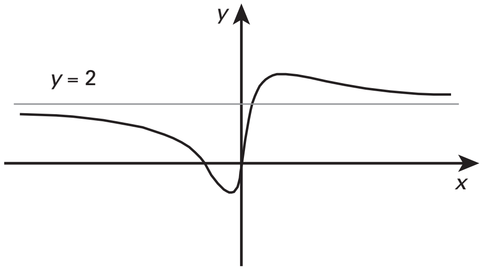
En la sección anterior vimos que en los límites infinitos la y se hacía muy grande, positiva o negativa según fuese la tendencia de la función. Ahora permitamos que x se vuelva grande a nuestro arbitrio (positiva o negativa) e investiguemos qué le ocurre a y.

Comencemos explorando con el comportamiento de la función $f(x)$ definida por la expresión,

$$f(x) = \frac{4x^2 + 5x}{2x^2 + 1}$$

La tabla y la gráfica de la figura siguiente nos muestran que cuando x se hace arbitrariamente grande la función tiende a parecerse a la recta $y = 2$.

x	$\frac{4x^2+5x}{2x^2+1}$
±10	2.23880
±100	2.02489
±1000	2.00249



El experimento nos muestra que conforme x crece más y más, los valores de la función se aproximan cada vez más a 2. Podemos escribir entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5x}{2x^2 + 1} = 2$$

Si generalizamos un experimento como el anterior, podemos utilizar el símbolo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace muy grande.

Es pertinente aclarar que el símbolo ∞ no representa un número y sin embargo con frecuencia la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ se lee como:

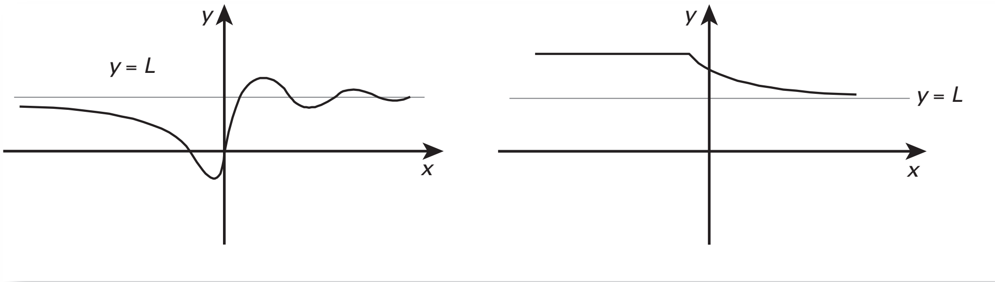
"El límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L".

Asíntotas horizontales

Se llama **asíntota horizontal** a la curva $y = f(x)$ la recta $y = L$ si ocurre alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = L$$

Las siguientes ilustraciones geométricas muestran la definición anterior.

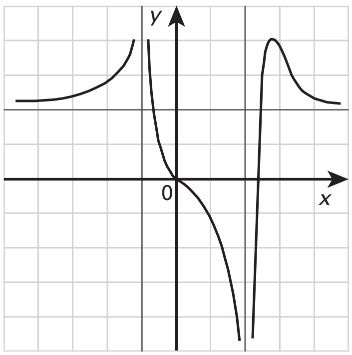


Ejemplos

1. Encuentra los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función de la gráfica.

Solución

Es evidente que cuando $x \to -1$ por ambos lados, $f(x)$ se hace muy grande; entonces,



$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Cuando $x \to 2$, entonces $f(x)$ decrece mucho, lo que significa que,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$$

Concluimos pues, que las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son **asíntotas verticales**.

Cuando x crece mucho hacia ambos lados, $f(x)$ tiende a 2. Así entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

Esto significa que $y = 2$ es una **asíntota horizontal**.

2. Una función muy común que ilustra los ejes como asíntotas es $y = \frac{1}{x}$, dado que si calculamos $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ por ambos lados de 0, lo que tenemos es,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

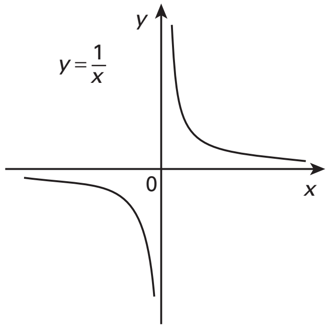
(*Continúa*)

(*Continuación*)

También si exploramos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$, vamos a encontrar que,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Este ejemplo nos muestra que tanto el eje x como el eje y, son asíntotas horizontal y vertical respectivamente.



3. Evalúa $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{3x^2+2x-1}$.

Solución
Para evaluar el límite en el infinito de una funcion racional, hay que dividir cada término del numerador como del denominador entre la mayor potencia de x que se halla en el denominador. El razonamiento es lógico ya que un denominador muy grande en una fracción, hace que el cociente tienda a cero.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{5+\frac{1}{\infty}-\frac{3}{(\infty)^2}}{3+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{(\infty)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+0-0}{3+0-0}=\frac{5}{3}$$

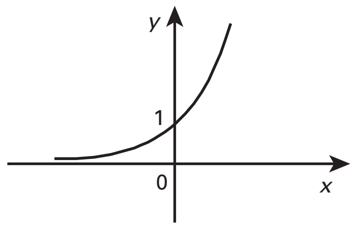
4. Demuestra que la función natural $y = e^x$ tiene como asíntota el eje x.

Solución

A partir de la gráfica y unas cuantas operaciones básicas podemos concluir lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty^-} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

Por lo tanto, x es una asíntota horizontal.



Evidencias de aprendizaje

1. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$, ¿qué significa $y = -1$?

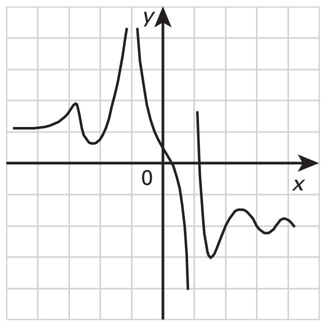
2. *a*) Dada la gráfica de $y = f(x)$, ¿se puede intersecar con una asíntota?

b) Considera la gráfica de $y = f(x)$ para encontrar los siguientes límites.

$\lim_{x\to-1} f(x) =$ $\lim_{x\to1^-} f(x) =$

$\lim_{x\to1^+} f(x) =$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$



c) Escribe las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

$x =$ $x =$

$y =$ $y =$

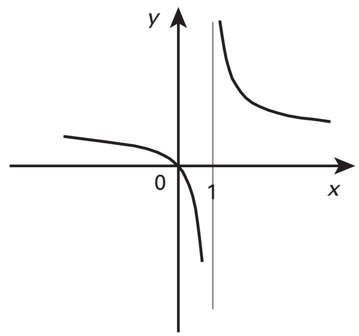
d) Traza con color azul todas las asíntotas.

3. Encuentra los siguientes límites.

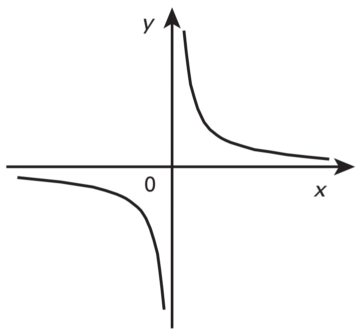
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2-2x+3} =$	*b*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-3x}{2x^3-x^2+3} =$
c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-x}{3-2x-5x^2} =$	*d*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-1}{x^5-1}$

4. Correlaciona los incisos de cada ecuación con la gráfica correspondiente.

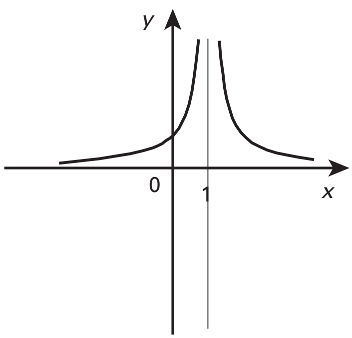
a) $y=\dfrac{1}{x}$ *b*) $y=\dfrac{x}{x-1}$ *c*) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ *d*) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$



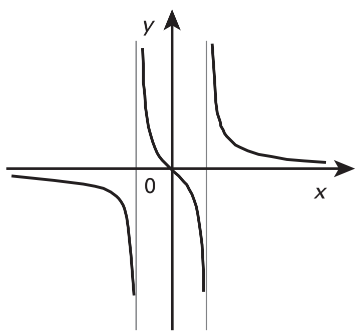
( )



( )



( )



( )

Reflexión. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz. ¿Qué sucede cuando $v \to c$?

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 2

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

COMPETENCIAS A DESARROLLAR	
¿Al finalizar el bloque adquiriste las competencias que te permiten:	
• interpretar gráficas de funciones continuas y discontinuas analizando el dominio y argumentando el comportamiento gráfico de la variable dependiente y los puntos de discontinuidad?	
• explicar e interpretar los valores de una tabla, calcular valores cercanos a un número y analizar el comportamiento de la variable dependiente en problemas de tu entorno social, económico y natural?	
• explicar e interpretar diferentes representaciones gráficas y determinar límites que tienden a infinito positivo o negativo, a cero, límites laterales por la izquierda y por la derecha, y límites finitos de los objetos naturales que te rodean?	
• argumentar la solución obtenida de un problema económico, administrativo, natural o social, mediante la teoría de límites?	
• valorar el uso de las TIC´s en el modelado gráfico y algebraico de los límites para facilitar su interpretación y simulación en la resolución de problemas presentes en tu contexto?	
• formular y resolver problemas, a partir del cálculo del dominio y contradominio de las funciones algebraicas para determinar sus límites, demostrando su habilidad en la resolución de problemas algebraicos?	
• determinar límites para funciones racionales, exponenciales, (exponente entero, fraccionario y negativo), logarítmicas y trigonométricas?	

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	
¿Al finalizar el bloque desarrollaste actividades que te permiten	
• explicar el concepto de límite y hacer una puesta en común en hojas de rotafolio, retroalimentar entre tus compañeros/as el trabajo sobre las concepciones obtenidas individualmente y así obtener una conclusión grupal?	

• comentar y analizar en pares la paradoja de Zenón “Aquiles y la tortuga” y explicar mediante una recta numérica la distancia recorrida por la Tortuga y por Aquiles, destacando la importancia que tiene el realizar correctamente la interpretación grafica y su uso en situaciones reales?	
• investigar en diferentes páginas de Internet información sobre el concepto y aplicación de límites, seleccionar algunas lecturas y realizar un ensayo sobre su importancia e impacto que a la fecha tienen?	
• trazar o esbozar funciones a partir de sus límites en lápiz y papel, comentar en pares las gráficas obtenidas y su interpretación?	
• elaborar conclusiones sobre aprendizajes logrados en las gráficas de funciones con algún Software Derive?	
• explicar e interpretar diferentes representaciones gráficas y determinar límites que tienden a infinito positivo o negativo, a cero, límites laterales por la izquierda y por la derecha, límites finitos de los objetos naturales que te rodean?	
• aplicar, calcular y resolver problemas de límites que involucren funciones trigonométricas a partir de presentaciones en PowerPoint destacando su aplicación e importancia en cualquier situación cotidiana y proporcionar ejemplos de situaciones reales?	
• mencionar opiniones sobre los desempeños que lograste durante el bloque, destacando las ventajas que tienen la información que se desarrollo durante el bloque en tu vida cotidiana?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.67. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el tema.

BLOQUE 3

Razones de cambio y sus aplicaciones



Desempeños del estudiante al concluir el bloque

- Calculas e interpretas el valor representativo de un cambio de posición económico, social o químico en función del tiempo, mediante la resolución de problemas de laboratorio físico-químico o en el contexto real.
- Comparas los diferentes procesos algebraicos que determinan una razón de cambio, mediante el análisis de casos relacionados con la producción agrícola, velocidad instantánea y la producción industrial existentes en el entorno cotidiano.
- Analizas y resuelves problemas matemáticos que modelan razones de cambio para cuantificar el cambio físico, químico, biológico, económico, entre otros, después de transcurrido un tiempo.

Objetos de aprendizaje

- El cambio a través del tiempo.
- Procesos para determinar el cambio.
- La variación de una cantidad en el tiempo.
- La velocidad, la rapidez y la aceleración de un móvil en un periodo.

Competencias a desarrollar

En este bloque el estudiante

- Analiza la producción de una empresa en un determinado tiempo e interpreta la producción promedio, su máxima y mínima producción, para obtener la razón de cambio promedio.
- Valora el uso de las TIC´s en el modelado y simulación de situaciones problemáticas de razón de cambio, en la interpretación de su valor a través del tiempo en problemas de producción industrial, de física y de química.
- Interpreta y cuantifica a través de modelos matemáticos, gráficas y tablas fenómenos físicos relativos a la variación de la velocidad, la velocidad promedio y la velocidad de un móvil en cualquier instante y cómo ésta varía a través del tiempo.
- Interpreta la razón de cambio como la pendiente de una pareja de puntos localizados en el plano cartesiano o como la pendiente de la recta secante en la resolución de problemas de física en situaciones del entorno.
- Argumenta e interpreta la razón de cambio como un límite, obtiene su representación algebraica y como consecuencia reconoce a este límite como la derivada de la función en resolución de problemas de su entorno.
- Resuelve gráfica y algebraicamente derivadas para resolver problemas de física, química, ciencias naturales, sociales, económicos, administrativos y financieros dentro de su ámbito inmediato.
- Interpreta, analiza y argumenta que la segunda derivada de una función es igual a la aceleración de un móvil en la resolución de problemas de física en el contexto de su vida cotidiana.

Estrategias de enseñanza

- Genere una lluvia de ideas que dé como resultado los diversos fenómenos físicos, naturales, químicos, económicos que cambian a través del tiempo.
- Organice al grupo en cuartetos para que investiguen en su entorno, sobre los productos agrícolas que se producen y el rendimiento de las cosechas en los últimos 15 años.
- Proponga situaciones similares a la anterior en el campo administrativo, económico, natural y social para que apliquen el concepto de razón de cambio y razón de cambio promedio.

- Elabore prácticas de campo, en las que se experimente el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, tiro vertical, tiro parabólico, caída libre y movimiento circular, para calcular la velocidad instantánea, la aceleración y la velocidad promedio.
- Simule el movimiento de objetos en algún software derive, geoGebra, graph, matlab, entre otros para calcular velocidad instantánea, promedio y aceleración.
- Proponga lecturas y ejercicios interactivos en Internet.

Estrategias de aprendizaje

- Interactúas con los elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo y enlistas sus características y consecuencias antes y después del cambio, aporta tu opinión al respecto.
- Analizas las investigaciones sobre producciones agrícolas e identificas el año de mayor producción, el de menor producción, calculas la producción promedio y emites una conclusión que socializas en el grupo.
- Analizas, interpretas y argumentas la razón de cambio promedio en inversiones a interés simple y compuesto, en la producción de acero, en la cantidad de contaminantes en la atmósfera, la cantidad de basura que se genera en una ciudad o en tu colonia, en el calentamiento global, en el número de artesanías que se venden en un determinado tiempo, entre otras situaciones de tu entorno.
- Realizas pequeños experimentos lanzando una pelota al aire, mides el tiempo y la distancia recorrida, describes el cambio de la velocidad y la distancia recorrida por la pelota en pequeños intervalos de tiempo y en un tiempo determinado. Estableces el modelo matemático que describe el movimiento.
- Seleccionas un software para resolver problemas económicos, administrativos, naturales, sociales, de producción agrícola e industrial, representas la solución mediante gráficas, tablas, aritmética y algebraicamente, explicas la razón de cambio, razón de cambio promedio, velocidad instantánea y aceleración.
- Interpretas a la derivada como la recta tangente a la curva en la resolución de problemas cotidianos.
- Realizas lecturas y resuelves ejercicios en las páginas:

  http://www.acienciasgalilei.com/mat/graf-func0.htm#max-min
  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Optimizacion_de_funciones/optimizacion.htm
  http://www.monografias.com/trabajos32/matematica_en_movimiento/
  http://www.fisem.org/descargas/8/Union_008_003.pdf

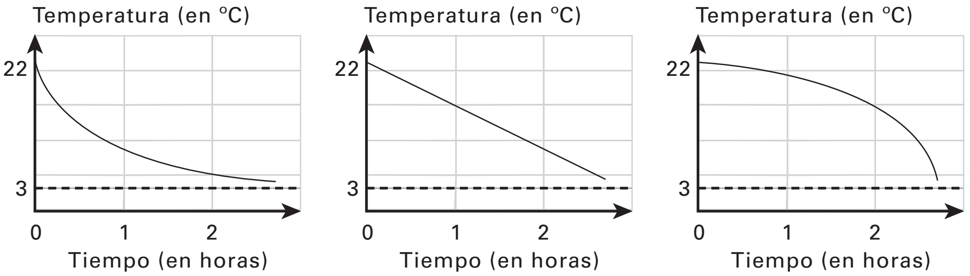
http://html.rincondelvago.com/razon-de-cambio.html
http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Unidad4.2-Razon_Cambio.html
http://dieumsnh.qfb.umich.mx/DIFERENCIAL/historia.htm

- Realizas en equipo una presentación en PowerPoint y socializas los desempeños que lograron a partir de las competencias desarrolladas durante el bloque.

Desarrolla tus competencias

Se coloca una bebida tibia en un refrigerador. La siguiente ilustración muestra 3 gráficas de la temperatura en función del tiempo.

a) Reflexiona e identifica la gráfica que corresponde a la razón de cambio de la temperatura con respecto del tiempo según el experimento en mención.
b) ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la razón de cambio después de una hora?



Secuencia didáctica

- Si es necesario, realiza el experimento utilizando un termómetro para registrar las temperaturas por lo menos cada 15 minutos; después traza una gráfica de tus observaciones.
- Recuerda que una razón de cambio es la división del cambio de ordenadas (y) al cambio de las abscisas (x); es decir, es una pendiente.

Trabajo de investigación

- Consulta en la red acerca del calentamiento global.
- ¿Cómo afecta el calentamiento global a la naturaleza?
- ¿Es posible revertir el calentamiento global?

- Comenta con tu maestro si se puede desarrollar un modelo matemático que describa la razón del deterioro que sufrirá el planeta si no logramos controlar el ritmo del calentamiento global.

Razones de cambio

En secciones anteriores estudiamos ya las razones de cambio a partir de tangentes y velocidades basadas prácticamente en tablas y evidencias numéricas. Ahora volveremos a resolver situaciones donde se presentan dichas razones de cambio pero estarán potenciadas con el concepto de límite. Empezaremos de nuevo con la definición de tangente, ya que es el antecedente inmediato para comprender la definición de derivada.

Proceso para determinar el cambio (tangentes)

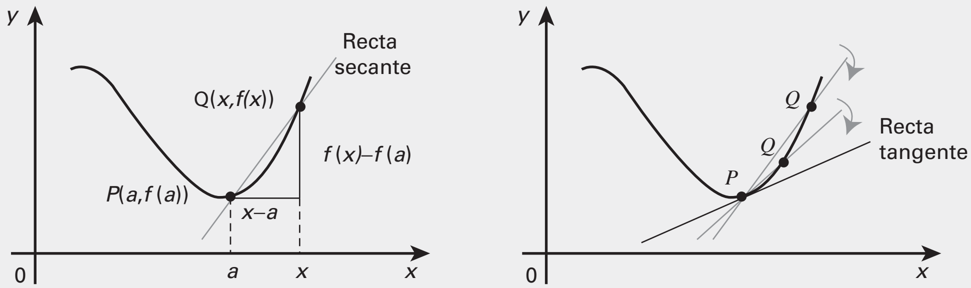
Recordemos que si tenemos una curva que tiene por ecuación $y = f(x)$ y queremos hallar la tangente en un punto dado $P(a, f(a))$, debemos considerar otro punto cualquiera de la curva $Q(x, f(x))$ y calcular la pendiente de la recta secante PQ.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{para} \qquad x \neq a$$

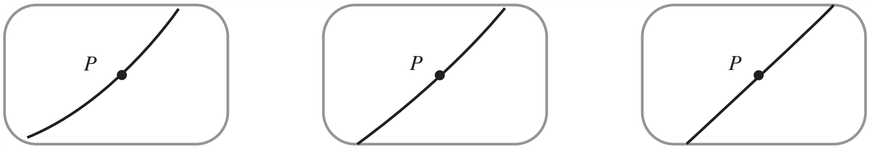
Enseguida, hacemos que x tienda hacia a para que Q se aproxime a P a lo largo de la curva. Cuando esto ocurre, entonces la pendiente m_{PQ} de la recta secante tiende a la pendiente m de la recta tangente como límite y definimos la recta que pasa por P con pendiente m como:

Recta tangente. Recta que pasa por el punto $P(a, f(a))$ de la curva $y = f(x)$ y cuya pendiente es el límite

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Si acercamos con un *zoom* el punto de tangencia P de una curva con la recta que pasa por él, lo que vemos es que en esta posición es donde la curva se parece más a la recta.



Una forma más fácil y amigable de expresar la pendiente de la recta tangente a una curva es hacer las siguientes transformaciones. Sea,

$$h = x - a$$

Entonces, $$x = a + h$$

Si sustituimos estos valores en la pendiente de la recta secante PQ tenemos,

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Luego, en la expresión $x = a + h$, cuando $x \to a$, entonces $h \to 0$, de manera que la expresión para la pendiente de la recta tangente $m = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, queda así:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplos

1. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$, en el punto $P(1,1)$.

Solución
Aquí tenemos que $a = 1$ y $f(x) = 2 - x^2$, así que la pendiente de la recta tangente es:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - (1+h)^2 - (2 - 1^2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 - (1 + 2h + h^2) - (1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 1 - 2h - h^2 - 1}{h}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-2-h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(-2-h) = -2$$

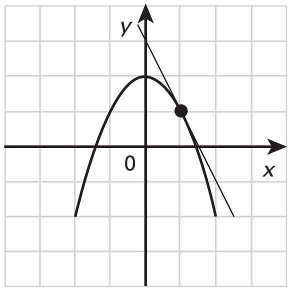
$$m = -2$$

Con la pendiente $m = -2$, el punto de la curva $P(1,1)$, podemos encontrar la ecuación de la recta tangente,

$$y - 1 = -2(x - 1)$$
$$y - 1 = -2x + 2$$

Simplificando
e igualando a cero $\quad 2x + y - 3 = 0$

La gráfica muestra la parábola y su tangente en $P(1,1)$.



2. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x^2}$, en el punto $P\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$

Solución

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$, así que la pendiente de la recta tangente en $P\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$ es

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{2^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2^2-(2+h)^2}{(2^2)(2+h)^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4-(4+4h+h^2)}{4(2+h)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4-4-4h-h^2}{4h(2+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-4-h)}{4\cancel{h}(2+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-4-h}{4(2+h)^2} = -\frac{4}{16}$$

$$m = -\frac{1}{4}$$

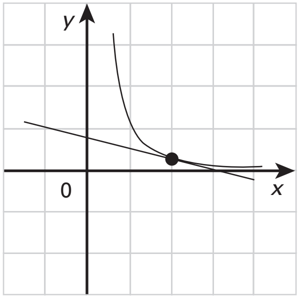
Con la pendiente $m = -\frac{1}{4}$, el punto de la curva $P\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$, podemos encontrar la ecuación de la recta tangente,

$$y-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(x-2)$$

Multiplicando por 4, $4y-1=-(x-2)$

Simplificando e igualando a cero, $x+4y-3=0$

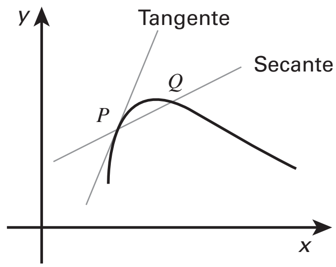
La gráfica muestra la curva y su tangente en $P\left(2,\frac{1}{4}\right)$



Evidencias de aprendizaje

1. *a*) Dada la gráfica de una función $y=f(x)$, encuentra una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(2,f(2))$ y $Q(x,f(x))$.

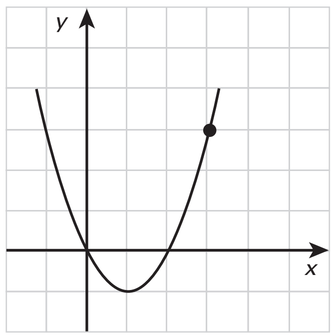
b) Escribe una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.



a) **Secante**	
b) **Tangente**	

2. *a*) Encuentra la pendiente de la recta tangente a la parábola $y=x^2-2x$, en el punto $P(3,3)$.

b) Encuentra la ecuación de la recta tangente del inciso *a*). Dibuja la recta tangente.

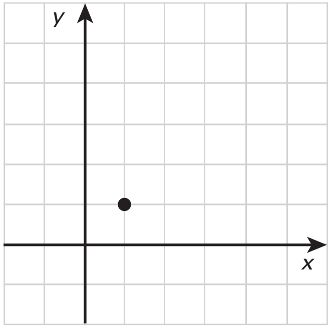


3. *a*) Encuentra la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^3$, en el punto $P(1,1)$.

b) Encuentra la ecuación de la recta tangente del inciso *a*).

c) Completa la tabla para graficar la curva y la recta tangente en el punto $P(1,1)$.

x	x^3
-1	
0	
1	
1.75	



4. Indica y realiza las operaciones necesarias para completar las columnas de la siguiente tabla y así encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto dado.

Curva	Punto	$m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$	Ecuación de la recta tangente
$y = \sqrt{x}$	(1, 1)		
$y = \dfrac{1}{x}$	$\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$		
$y = \dfrac{x+1}{x}$	(1, 2)		

La velocidad como razón de cambio

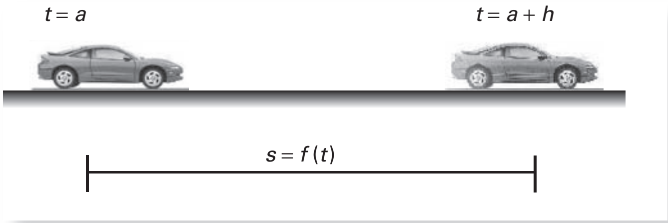
Otra razón de cambio fundamental en el descubrimiento del cálculo diferencial es el límite del valor de las velocidades promedio medidas en periodos cada vez más cortos de un objeto en movimiento.

Si un objeto se mueve en línea recta, la ecuación del movimiento que describe es $s = f(t)$; donde s es el desplazamiento desde el punto de partida, en el instante t.

Veamos cómo es esto; en el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio de posición es $f(a + h) - f(a)$ (ver figura). La velocidad promedio por definición es:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ de la curva que vimos en la sección anterior.



Cuando hacemos los cálculos de la velocidad promedio en periodos cada vez más cortos, es lo mismo que hacer que h tienda a 0 y lo que obtenemos es la *velocidad instantánea*, v, en el instante $t = a$ como límite de las velocidades promedio:

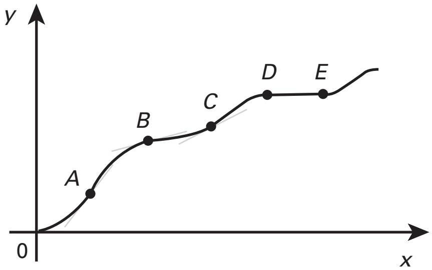
$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Es decir, la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en el punto P de la curva de posición de un objeto en movimiento.

Ejemplos

1. Usa la gráfica de la función de posición de un móvil para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la velocidad inicial del móvil?
b) ¿Dónde es mayor la velocidad, en B o en C?
c) Describe dónde aceleraba o desaceleraba el móvil, ¿en A , B y C?
d) ¿Qué pasó entre D y E?



(*Continúa*)

(*Continuación*)

Solución

a) La velocidad inicial es cero.
b) La pendiente de la tangente es mayor en *C* que en *B*, por tanto la velocidad es mayor en *C*.
c) En *A* y *C* aceleró, en *B* desaceleró.
d) El móvil se detuvo (la pendiente es cero).

2. La tabla anexa muestra la población *P* (en miles) de una población de una ciudad, desde el año 1990 hasta el año 2000.

Año	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	592	612	625	680	715	735

a) Encuentra la razón promedio de crecimiento incluyendo las unidades.

- De 1992 a 1998
- De 1996 a 1998
- De 1998 a 2000

b) Promedia dos razones promedio de cambio para estimar la razón instantánea de crecimiento en 1998.
c) Estima la razón instantánea de crecimiento en 1998 midiendo la pendiente de la tangente en ese año.

Solución

a)

- Razón promedio de crecimiento de 1992 a 1998

$$\frac{715-612}{1998-1992}=\frac{103}{6}\approx 17.17 \text{ miles de personas/año.}$$

- Razón promedio de crecimiento de 1996 a 1998

$$\frac{715-680}{1998-1996}=\frac{35}{2}=17.5 \text{ miles de personas/año.}$$

- Razón promedio de crecimiento de 1998 a 2000

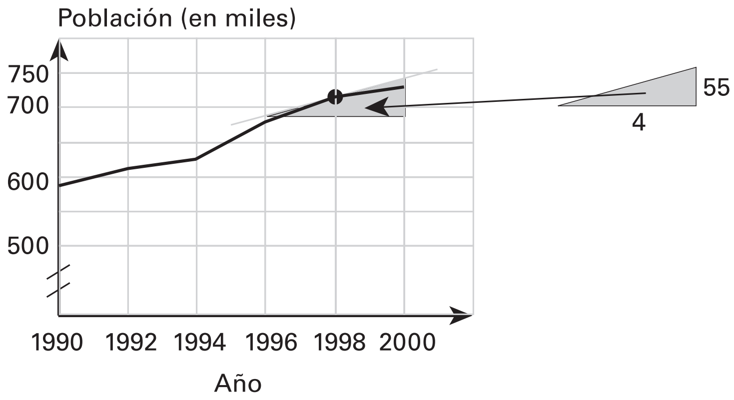
$$\frac{735-715}{2000-1998}=\frac{20}{2}=10 \text{ mil personas/año.}$$

b) Para obtener la razón instantánea de crecimiento poblacional de 1998 promediamos los periodos 1996 a 1998 con 1998 a 2000.

$$\frac{17.5+10}{2}=13.75 \text{ mil personas por año.}$$

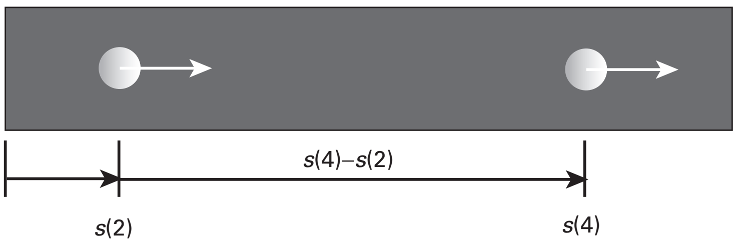
c) En la gráfica posicionamos los datos de la tabla y trazamos una curva suave que se aproxime al comportamiento de la población. Luego trazamos una recta tangente en el punto que corresponde al año 1998 y, medimos los lados del triángulo rectángulo en gris para estimar la pendiente de la recta tangente.

$$m=\frac{55}{4}\approx 13.75$$



3. La distancia (en metros) recorrida por un objeto desde un punto está dada por $s(t)=t^2$.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio del objeto entre $t=2$ y $t=4$?
b) Calcula la velocidad instantánea en el tiempo $t=3$.



(*Continúa*)

(*Continuación*)

Solución

a) Utilizamos la ecuación $s(t) = t^2$ para calcular la velocidad promedio:

$$v_{prom} = \frac{s(4)-s(2)}{4-2} = \frac{4^2-2^2}{2} = 6 \text{ m/s}$$

b) La velocidad instantánea en $t = 3$ es:

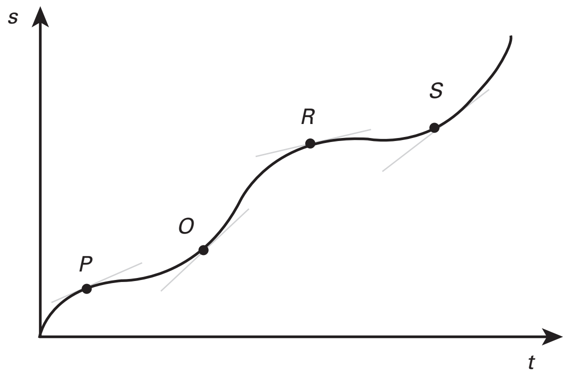
$$\begin{aligned} v(3) = \lim_{h\to 0}\frac{s(3+h)-s(3)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-(3)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h\to 0}(6+h) = 6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Evidencias de aprendizaje

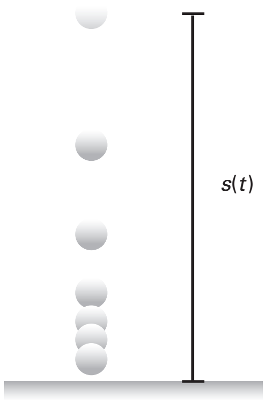
1. La gráfica muestra cómo varía la posición de un automóvil; utilízala para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿El automóvil viajaba más rápido en *Q* o en *R*?

b) Describe los puntos donde aumentó la velocidad y donde la disminuyó.



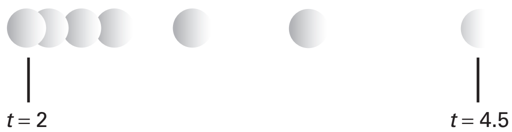
2. Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 64 pies/s; la altura que alcanza (en pies) de acuerdo con la ecuación del movimiento vertical es $s(t) = 64 - 16t^2$, donde t es el tiempo en segundos. Utiliza la expresión $v(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{s(3+h) - s(3)}{h}$ para calcular la velocidad instantánea cuando $t = 3$ segundos.



3. El desplazamiento en (metros) de una partícula que se mueve en línea recta viene dado por la expresión $s = t^2 - 3t$, donde t se mide en segundos.

a) Encuentra las velocidades promedio durante los siguientes intervalos: [2, 4] y [2.5, 4.5]

b) Encuentra la velocidad instantánea cuando $t = 4$.

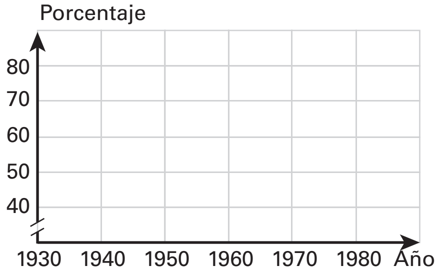


4. La siguiente tabla muestra el porcentaje de la población de cierto país que vive en áreas urbanas como una función del año.

Año	1930	1940	1950	1960	1970	1980
%	52	55	61	70	72	75

a) Determina la razón promedio de cambio de porcentaje de la población que vivía en las áreas urbanas entre 1940 y 1970.

b) Calcula la razón de cambio instantánea de esta función en el año 1960, trazando una curva suave y aproximando la recta tangente en este año.

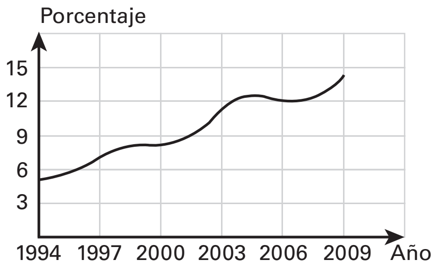


5. La siguiente estadística muestra el número de divorcios que hay en México por cada 100 matrimonios desde el año 1980 hasta 2008.

Año	1994	1997	2000	2003	2006	2009
Número de divorcios	5	7	8	11	12	14

a) Determina la razón promedio de cambio del número de divorcios que hubo entre los años 1994 y 2006.

b) Utiliza la gráfica mostrada para calcular la razón de cambio instantánea de divorcios que se dio en el año 2002, aproximando la recta tangente en este año.



La derivada y otras razones de cambio

Hasta ahora hemos estudiado que la razón de cambio de una ecuación $y = f(x)$ en un punto donde $x = a$ en cualquier área del conocimiento se puede medir con el límite de la forma

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Este límite representa la razón de cambio instantánea que se puede dar en un fenómeno físico, una reacción química, en un proceso económico como el costo marginal de un producto, el cambio poblacional de las concentraciones urbanas o un cambio biológico como una colonia de bacterias, etcétera.

Todas estas razones de cambio se pueden interpretar como la pendiente de las tangentes respectivas a cada razón de cambio. Es decir, cuando tratamos situaciones de esta naturaleza no sólo estamos resolviendo problemas de geometría, sino paralelamente resolvemos problemas inherentes a la ciencia y a la ingeniería en las que se presentan contextos de variabilidad.

Ahora ya estamos en condiciones de darle nombre al límite que de manera recurrente hemos tratado hasta aquí. Este límite se llama **derivada**.

Definición
La derivada de una función f en un número a denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

si el límite existe.

La derivada como función

En la definición anterior, si hacemos que el número a varíe y lo reemplazamos con la variable x, entonces la expresión de la **derivada** $f'(x)$ va a quedar como sigue:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El dominio de $f'(x)$ es el conjunto de números x tal que la derivada de f existe.

Esta definición simbólica de la **derivada** de una función $f(x)$ se lee como: “El límite de la relación del cambio de la variable dependiente al cambio de la variable independiente cuando este último tiende a cero”.

Ejemplos

1. Si $f(x) = x^2 - 2x$, encuentra la derivada $f'(x)$ como función de x. Traza las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$ para compararlas y explicar su significado.

Solución

Aquí $f(x + h) = (x + h)^2 - 2(x + h)$ y $f(x) = x^2 - 2x$, entonces

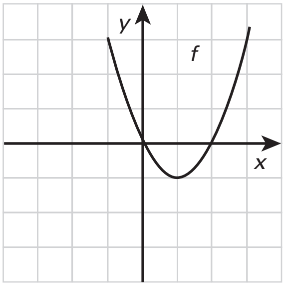
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h}$$

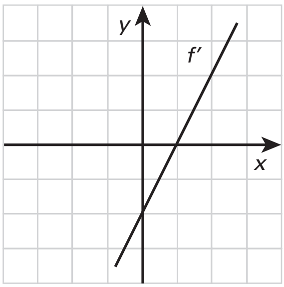
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{2x}-2h-\cancel{x^2}+\cancel{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h-2)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h-2) = 2x-2$$

Al comparar las gráficas debemos recordar que la derivada f' representa la pendiente de la recta tangente a f en cada punto. Por ejemplo, observa que $f'(x) = 0$ cuando f tiene una pendiente horizontal (en $x = 1$) y que $f'(x)$ es negativa ($x < 1$) o positiva ($x > 1$) cuando f tiene pendientes negativa o positiva respectivamente.





2. Si $f(x)=2\sqrt{x}$, encuentra la derivada $f'(x)$ como función de x.

Solución

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{x+h}-2\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h-x)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

El resultado de $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ y existe sólo para $x>0$.

Otras formas de indicar la derivada

Si partimos de la notación de función $y=f(x)$ para recordar que x es la variable independiente y la dependiente es y, otros símbolos para escribir la derivada son:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$$

Los cuales se leen como: "la derivada de $f(x)$ con respecto a x"; esto es porque no deben considerarse como una división; deben verse sólo como **operadores de derivación**.

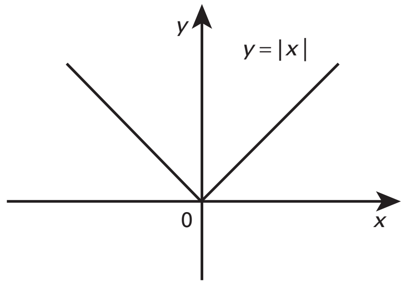
¿Dónde es diferenciable una función?

Una función f es diferenciable en a sólo si $f'(a)$ existe.

Ejemplo

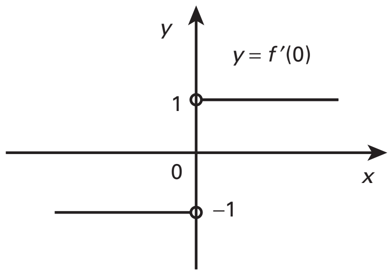
1. La función $y = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$ porque $f'(0)$ no existe.

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(0+h) - 0}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-(0+h) - (-0)}{h} = -1 \end{cases}$$



Como $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|x+h| - |x|}{h}$ por la izquierda y por la derecha de cero son diferentes, entonces $f'(0)$ no existe.

La inexistencia geométrica de $f'(0)$ podemos verla en la siguiente gráfica.

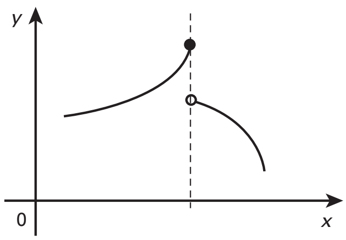


En general, son 3 las situaciones en que una función $y = f(x)$ deja de ser diferenciable.

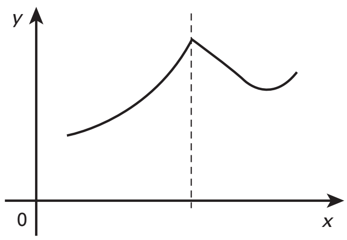
a) En puntos donde al calcular $f'(x)$ encontramos que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.

b) En puntos donde la función tiene esquinas o retorcimientos porque la gráfica no tiene tangente allí.

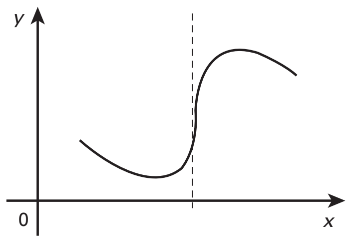
c) En puntos donde la curva de la función tiene rectas tangentes verticales.



Una discontinuidad



Una esquina



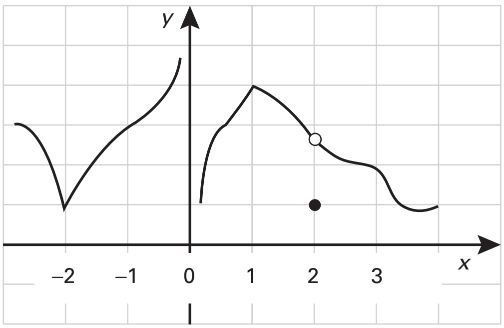
Una tangente vertical

Evidencias de aprendizaje

Encuentra la derivada de la función dada escribiendo su definición con símbolos en la segunda columna y su resultado en la tercera.

Función	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Resultado
1. $y=2x+3$		
2. $y=\sqrt{x}$		
3. $y=\dfrac{1}{x}$		
4. $y=3x^2-4$		

5. Dada la gráfica de f, identifica y escribe las abscisas donde no es diferenciable. Explica porqué.



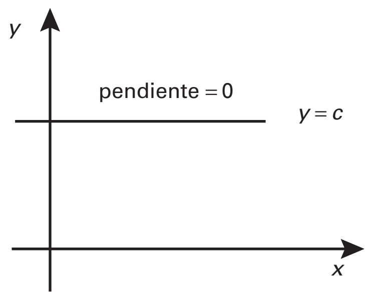
Reglas para derivar

Calcular la derivada de una función a partir de su definición es un proceso tedioso y que demanda mucho tiempo. Esa es la razón por la que se han desarrollado instrumentos (teóricos y tecnológicos) que permiten acortar el largo camino que hemos estudiado hasta aquí.

La derivada de una función $f(x)$ nos produce otra función. Este proceso lo podemos esquematizar de la siguiente manera.

Regla 1. La derivada de una **función constante** $f(x) = c$ es cero. Puesto que una función constante no tiene cambios, su pendiente es cero en todo su dominio.

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

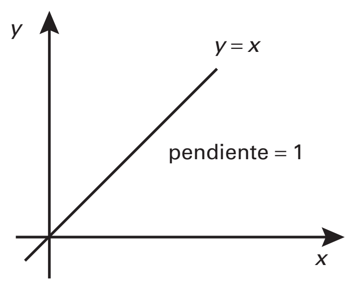


Ejemplo

$$\text{Si } y = 3 \qquad \text{entonces} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d(3)}{dx} = 0$$

Regla 2. La derivada de la **función identidad** $f(x) = x$ es 1. En este caso, la razón de cambio es 1 a 1.

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$



Si aplicamos la definición de derivada $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para derivar $y = x^2$, vamos a encontrar que $f'(x^2) = 2x$, luego siguiendo el mismo procedimiento $f'(x^3) = 3x^2$, y si continuamos así $f'(x^4) = 4x^3$, vemos que en general existe un patrón para derivar $f(x^n)$.

Regla 3. Si $f(x) = x^n$ donde n es cualquier número real entonces su derivada es:

$$\frac{d\left(x^n\right)}{dx}=nx^{n-1}$$

Ejemplos

a) $\dfrac{d\left(x^5\right)}{dx}=5x^4$ $\quad n = 5, \quad n - 1 = 4$

b) $\dfrac{d\left(x^{-3}\right)}{dx}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$ $\quad n = -3, \quad n - 1 = -4$

c) $\dfrac{d\left(\sqrt{x^3}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{dx}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $\quad n=\dfrac{3}{2}, \quad n-1=\dfrac{1}{2}$

Regla 4. Regla del múltiplo constante. Si c es una constante y $f(x)$ es una función, entonces su derivada es:

$$\frac{d}{dx}cf(x)=c\frac{d}{dx}f(x)$$

Ejemplo

Si $y = 7x^3$ entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(7x^3\right)=7\dfrac{d\left(x^3\right)}{dx}=7\left(3x^2\right)=21x^2$

Regla 5. Regla de una suma algebraica. Si u, v y w son funciones de x y además son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dx}\left(x^5+2x^3-3x-8\right)=\frac{d}{dx}\left(x^5\right)+2\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-3\frac{d}{dx}\left(x\right)-\frac{d}{dx}\left(8\right)$$
$$=5x^4+2\left(3x^2\right)-3\left(1\right)-0$$
$$=5x^4+6x^2-3$$

Desarrolla tus habilidades

Encuentra la derivada de cada una de las siguientes funciones, escribiendo el resultado en la columna de la derecha.

Función	Derivada
1. $y=3x^5$	$\frac{dy}{dx}=$
2. $y=e\,x^3$	$\frac{dy}{dx}=$
3. $y=-\frac{7}{x^2}$	$\frac{dy}{dx}=$
4. $y=\frac{3}{4x^5}$	$\frac{dy}{dx}=$
5. $y=5-2x+\pi x^2-3x^5$	$\frac{dy}{dx}=$
6. $y=\sqrt[4]{x^5}$	$\frac{dy}{dx}=$

Continúa el ejercicio de la misma manera.

Función	Derivada
7. $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^3}}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
8. $y=3+2\sqrt{x}-5x+7x^2-x^5$	$\dfrac{dy}{dx}=$
9. $y=3x^{-5}+2x^{-2}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
10. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{x^3}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
11. $y=\dfrac{1}{5x}+5x$	$\dfrac{dy}{dx}=$
12. $y=\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
13. $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
14. $y=\dfrac{x^2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{dy}{dx}=$

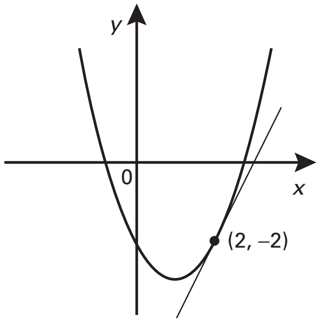
Aplicaciones de la derivada como razón de cambio

1. **Tangente a una curva.** Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 2x - 2$ en el punto (2, –2).

   Solución
   Sabemos que la derivada de la función $y = x^2 - 2x - 2$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado. Por tanto,

   $$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 = m \qquad \text{en cualquier punto}$$

   $$m = 2(2) - 2 = 2 \qquad \text{en el punto } (2, -2)$$

   De esta forma la ecuación de la recta tangente en el punto dado es:

   $$y - (-2) = 2(x - 2)$$
   $$y + 2 = 2x - 4$$
   $$y = 2x - 6 \qquad \text{o bien} \qquad 2x - y - 6 = 0 \text{ (Ver gráfica).}$$

2. **Producción agrícola.** La producción y de un campo de trigo (medida en toneladas por hectárea) es una función de la cantidad x de fertilizante en kilogramos que se utiliza por hectárea, y está modelada por la ecuación,

   $$y = 3 + 0.7x - 0.05x^2$$

   a) ¿Cuál es la producción si utilizan 5 kg de fertilizante por hectárea?
   b) Encuentra $f'(5)$, indica las unidades e interpreta el resultado.

   Solución
   a) La producción con 5 kg de fertilizante es $f(5)$.

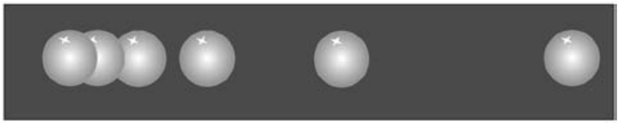
   $$f(5) = 3 + 0.7(5) - 0.05(5)^2 = 5.25 \text{ toneladas por hectárea.}$$

b) Aquí deseamos saber la razón de cambio de producción de trigo $f'(x)$, cuando se aplican exactamente 5 kg de fertilizante.

$$f'(x) = 0.7 - 0.1x$$

Por tanto, $f'(5) = 0.7 - 0.1(5) = 0.2$ toneladas por hectárea por kilogramo de fertilizante.

3. **Velocidad de un móvil en función del tiempo.** Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación de movimiento $s(t) = t^3 - 2t + 1$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentra la velocidad instantánea cuando $t = 1.5$ segundos.



Solución
Queremos conocer $s'(t)$ cuando $t = 5$

$$s'(t) = 3t^2 - 2$$

Por tanto, $s'(1.5) = 3(1.5)^2 - 2 = 4.75$ metros por segundo

4. **Aceleración de un móvil en función del tiempo.** En el ejemplo anterior si $s'(t)$ representa la derivada de la posición de un móvil con respecto al tiempo, entonces la derivada de $s'(t)$ significa un cambio de velocidad del móvil; por lo tanto, es una **aceleración**, corresponde a la derivada de la derivada, y se llama *segunda derivada* de la función. Simbólicamente se escribe como:

$$s''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

Por lo tanto, la aceleración a de la partícula del ejemplo 3 se calcula de la siguiente manera:

$$a = s''(t) = \frac{d}{dt}\left(3t^2 - 2\right) = 6t$$

Para conocer la aceleración de la partícula en el instante $t = 1.5$ segundos basta con sustituir, en la segunda derivada, el tiempo por 1.5.

$$a = 6t = 6(1.5) = 9 \ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

5. **Producción industrial.** El costo (en pesos) de producir x unidades de un artículo está dado por:

$$C(x) = 0.8x^3 + 750x + 1000$$

a) La derivada del costo se llama costo marginal. Determina $C'(x)$.
b) Determina $C(10)$ y $C'(10)$ e indica las unidades de cada concepto.

Solución

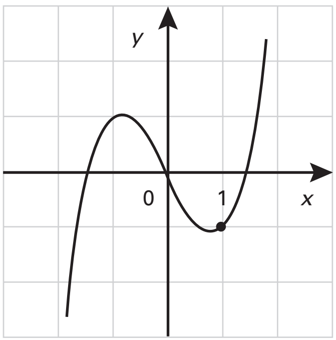
a) $C'(x) = \dfrac{dC}{dx} = 2.4x^2 + 750$

b) $C(10) = 0.8(10)^3 + 750(10) + 1000 = 9\,300$ pesos es el costo de producir 10 artículos.

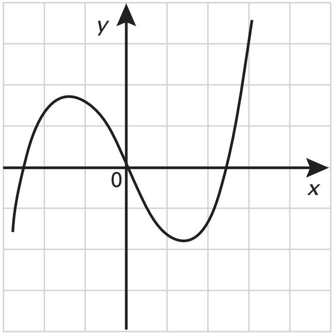
$C'(10) = 2.4(10)^2 + 750 = 990$ pesos por artículo, es el costo cuando se producen 10 de éstos.

Evidencias de aprendizaje

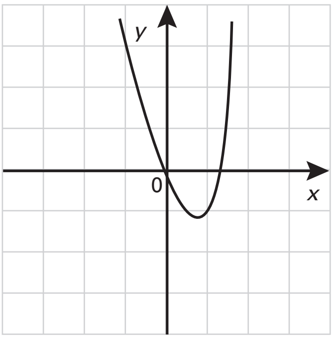
1. Determina la ecuación de la recta tangente a $y = x^3 - 2x$ en el punto donde $x = 1$. Traza la recta tangente en la gráfica.



2. Determina la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ en el punto donde $x = 0$. Traza la recta tangente en la gráfica.



3. Halla el punto de la curva $y = x^4 - 2x$ donde la pendiente de la recta tangente sea igual a 2. Traza la recta tangente en la gráfica.



4. **Variación de una cantidad en función del tiempo.** La altura de un montón de arena (en metros) se representa por el modelo $h(t) = 5 - 0.2t^2$, donde t se mide en años. Determina la altura del montón cuando $t = 5$ así como la razón de cambio $h'(5)$ e interpreta su significado.

5. **Costo de producción.** El costo de producir x unidades de un producto es $C(x) = 10 + 3x^2$ pesos. Encuentra el **costo marginal** $C'(x)$ de producir la unidad 10. Interpreta tu respuesta en términos del costo.

6. **Función de ingreso.** El ingreso I obtenido al realizar una operación mercantil se obtiene multiplicando la demanda q de un producto por el precio p de éste, $I = pq$. Si la demanda de un producto está dada por $q = 50 - 2p$.

   a) Escribe el ingreso $I = pq$ como una función del precio. (Sustituye q en la ecuación de ingreso).

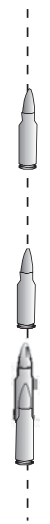
   b) Encuentra el ingreso marginal $I'(p)$ cuando el precio es de 10 pesos e interpreta tu resultado.

7. **Ciencias naturales.** Cuando los árboles crecen, agregan capas circulares de madera cada año directamente dentro de su corteza interior. Determina la razón de cambio del área $\left(\dfrac{dA}{dr}\right)$ de estos círculos concéntricos con respecto al radio. Recuerda que el área de un círculo se calcula con la expresión $A(r) = \pi r^2$. Interpreta tu resultado.

8. **Ciencias naturales.** La cantidad de litros de agua que contiene un tanque al comenzar a vaciarlo viene expresada por $Q(t) = 600(90 - t)^2$ donde t viene dado en minutos. ¿Qué tan rápido sale el agua al final de 10 minutos?

9. **Velocidad y aceleración.** Una bala disparada hacia arriba desde la superficie de la tierra puede alcanzar una altura de $s(t) = 832t - 16t^2$ pies después de t segundos.

   a) ¿Cuánto tiempo tardará la bala para alcanzar su punto más alto?
   b) ¿Cuál es su aceleración?



10. **Velocidad y aceleración.** La ecuación del movimiento de una partícula es $s(t) = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentra:

    a) La velocidad y la aceleración después de 1.5 segundos.
    b) La aceleración cuando la velocidad es cero.

Derivadas de funciones exponenciales

Derivar la función exponencial es de gran relevancia por la gama de aplicaciones que ésta tiene y la frecuencia con que se presenta en la vida cotidiana.

Para encontrar una regla que derive la función exponencial $f(x) = a^x$, tenemos que recurrir a la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x\left(a^h - 1\right)}{h}$$

Como a^x no depende de h podemos factorizar la expresión y

$$f'(x) = a^x \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}} \longrightarrow f'(0)$$

Fíjate que $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ es el valor de la derivada de f en 0.

Esto significa que la función exponencial $f(x) = a^x$ es diferenciable en 0, y por tanto la derivada de cualquier función exponencial con base a es:

$$f'(x) = f'(0)\, a^x$$

La base más sencilla que existe para sustituir a es la de los logaritmos naturales e (recuerda que $e \approx 2.7182$) que se define de la siguiente manera:

$$\boxed{e \text{ es el número tal que } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1}$$

Si en la expresión $f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$ ponemos $a = e$ y $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ obtenemos una de las fórmulas más importantes de derivación:

La derivada de la función exponencial

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

Como puedes ver, la particularidad que hace tan especial la función $f(x) = e^x$ es que es su propia derivada.

Ejemplos

1. Encuentra la derivada de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$

Solución
Utilizamos valores de h cercanos a 0 para calcular el valor de $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ cuando $a = 2$ y cuando $a = 3$. (Ver tabla de valores).

h	$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$	$\lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h}$
0.0001	0.6932	1.0987

Por tanto, las derivadas buscadas son:

$$\frac{d}{dx}\left(2^x\right) \approx 2^x\left(0.69\right) \approx \left(0.69\right)2^x \qquad \frac{d}{dx}\left(3^x\right) \approx 3^x\left(1.10\right) \approx \left(1.10\right)3^x$$

2. Encuentra la derivada de $y = 5x + e^x$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}e^x = 5\left(1\right) + e^x = 5 + e^x$$

3. Encuentra la derivada de $y = x^2 + 2e^x$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^2 + 2\frac{d}{dx}e^x = 2x + 2e^x$$

4. **Crecimiento poblacional.** Si t indica los años desde 1980, la población en México (en millones) estaba dada por $P(t) = 68.4(1.026)^t$

a) Encuentra una expresión para determinar la tasa de natalidad de personas por año.
b) Estima la tasa de natalidad para $t = 20$, es decir, a principios del año 2000.

Solución

a) En realidad deseamos conocer la razón de cambio de la población $P'(t)$

$$P'\left(t\right) = 68.4\left[\left(1.026\right)^t \lim_{h\to 0}\frac{\left(1.026\right)^h - 1}{h}\right]$$

Si consideramos un valor para $h = 0.0001$ entonces,

$$P'(t) = 68.4(1.026)^t\,(0.02567) = 1.7559(1.026)^t$$

b) En el resultado del inciso a) sustituimos $t = 20$

$$P'(20) = 1.7559(1.026)^{20} = 2.9344$$

A principios del año 2000, la población en México estaba creciendo a razón de aproximadamente 2.934 millones de personas por año.

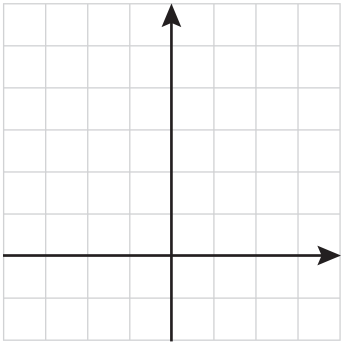
Evidencias de aprendizaje

1. Encuentra la derivada de cada función y escribe su resultado en la columna de la derecha.

Función	Derivada
a) $y = 2x^3 + 3e^x$	$\frac{dy}{dx} =$
b) $P(t) = 3t^2 + e^t$	$P'(t) =$
c) $y = 4(10)^x - 2x^3$	$\frac{dy}{dx} =$
d) $y = 3(2)^x - 2x^2 - 3$	$\frac{dy}{dx} =$
e) $P(t) = 300(1.02)^t$	$P'(t) =$
f) $s = 5t^2 - 4e^t$	$\frac{ds}{dt} =$

2. Para $f(x) = e^x$ encuentra $f'(0)$ y $f'(1)$. Traza la gráfica de $f(x)$ y la recta tangente en $x = 0$.

x	e^x
-2	
-1	
0	
1	
1.5	



3. **Modelo de la inflación.** En cierto año, México tuvo una inflación anual del 5% y los precios en función del tiempo fueron modelados con la ecuación,

$$f(t) = f_0(1.05)^t$$

Donde f_0 es el precio cuando $t = 0$ y t es el tiempo en años. Si $f_0 = 12$. ¿Cuánto suben los precios cuando $t = 10$? Completa la siguiente tabla para encontrar la solución, indicando las unidades.

f_0	h	$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1.05)^h - 1}{h}$	$f'(t) = f'(0)(1.05)^t$
12	0.0001		

4. **Producción de energía solar.** La producción de energía solar, medida en megavatios puede expresarse por la función exponencial $E(t) = 50(1.19)^t$, donde t representa los años desde 1990. Encuentra $E(0)$ y $E'(10)$. Indica las unidades e interpreta los resultados.

h	$E'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$	$E'(t) = 50E'(0)\ a^t$
0.0001		

5. **Razón de cambio de una población.** En 1970 cierta población observó que el número de habitantes se comportaba de acuerdo con la fórmula

$$P(t) = 40000\,(0.90)^t$$

donde $P(t)$ es la población de la ciudad t años después del inicio de 1970. ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la población al principio de 1993?

Regla de la cadena

La regla de la cadena es el argumento que necesitamos para derivar una función compuesta.

Por ejemplo; si vamos a buscar $\dfrac{dy}{dx}$ de la función $y = \sqrt{x^2+1}$, entonces hacemos $u = x^2 + 1$ y $\dfrac{du}{dx} = 2x$

Es evidente que $y = \sqrt{u}$ y $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

Pero estamos buscando la derivada de y con respecto a x, que es equivalente a tener la expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

La regla de la cadena permite entonces obtener los siguientes fórmulas de derivación:

> Si n es cualquier número real y $u = f(x)$ es diferenciable, entonces:
>
> $$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Ejemplos

1. Sabemos que el consumo C, (en litros) de gasolina de un automóvil depende de la distancia s (en kilómetros) que recorre y que s depende del tiempo, t en horas. Si consume 0.1 litro por cada km que recorre y el automóvil viaja a 60 km/h, ¿qué tan rápido se consume la gasolina?

Solución
La razón de consumo de gasolina con respecto a la distancia es:

$$\frac{dC}{ds} = 0.1 \text{ litros/kilómetro}$$

La razón a la cual recorre la distancia con respecto al tiempo es:

$$\frac{ds}{dt} = 60 \text{ kilómetros/hora}$$

Por tanto, la razón de consumo de la gasolina con respecto al tiempo es:

$$\frac{dC}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(0.1 \ \frac{\text{litros}}{\text{kilómetro}}\right)\left(60 \ \frac{\text{kilómetros}}{\text{hora}}\right) = 6 \ \frac{\text{litros}}{\text{hora}}$$

2. Encuentra la derivada de $y = (x^2 - 1)^{25}$

Solución
En la fórmula $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ hacemos $u = x^2 - 1$, $\frac{du}{dx} = 2x$ y $n = 25$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 25\left(x^2 - 1\right)^{24}\left(2x\right) = 50x\left(x^2 - 1\right)^{24}$$

3. Encuentra la derivada de $y = \frac{3}{\sqrt{2 - x^3}}$

Hacemos $u = 2 - x^3$, $\frac{du}{dx} = -3x^2$ entonces $y = \frac{3}{\sqrt{u}} = 3u^{-\frac{1}{2}}$ y $n = -\frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\left(2 - x^3\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-3x^2\right) = \frac{9x^2}{2\sqrt{\left(2 - x^3\right)^3}}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

4. Encuentra la derivada de $f(t)=e^{-t^2}$

Hacemos $u=-t^2$, entonces $\dfrac{du}{dt}=-2t$

Por tanto $f'(t)=e^{-t^2}(-2t)=-2te^{-t^2}$

Evidencias de aprendizaje

1. Encuentra la derivada de cada función y escribe su resultado en la columna de la derecha.

Función	Derivada
a) $y=(2x-3)^3$	$\dfrac{dy}{dx}=$
b) $w=(2-t^3)^{32}$	$\dfrac{dw}{dt}=$
c) $y=e^{5x}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
d) $y=5e^{0.07x}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
e) $f(t)=3e^{2t}-e^{2t+1}$	$f'(t=)$
f) $y=\sqrt[3]{5x-4}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
g) $y=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-3}}$	$\dfrac{dy}{dx}=$

Aplicaciones

1. La ecuación de demanda de un producto está dada por $y = f(x) = 100e^{-0.25x}$, donde y es la cantidad vendida y x es el precio del producto, en dólares. Determina $f(2)$ y $f'(2)$. Explica en términos económicos tus respuestas.

x	$f(x) = 100e^{-0.25x}$	$f'(x)$
2		

2. El saldo S, de una cuenta bancaria t años después de que se realiza un depósito de 100 dólares está dado por $S = 100e^{0.08t}$. ¿A qué razón cambia el saldo de la cuenta cuando $t = 7$ años? Interpreta tu respuesta en términos financieros.

3. La concentración de un medicamento en el cuerpo es $f(t) = 30e^{-0.2t}$ mg/mL. ¿Cuál es la concentración 6 horas después de que se administró la sustancia? ¿Con qué rapidez está cambiando la concentración en el tiempo?

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 3

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anota en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca 😐 **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

COMPETENCIAS A DESARROLLAR	
¿Al finalizar el bloque adquiriste las competencias que te permiten	
• analizar la producción de una empresa en un determinado tiempo e interpretar la producción promedio, su máxima y mínima producción, para obtener la razón de cambio promedio?	
• valorar el uso de las TIC´s en el modelado y simulación de situaciones problemáticas de razón de cambio, en la interpretación de su valor a través del tiempo en problemas de producción industrial, de física y de química?	
• interpretar y cuantificar a través de modelos matemáticos, gráficas y tablas, fenómenos físicos relativos a la variación de la velocidad, la velocidad promedio, la velocidad de un móvil en cualquier instante y cómo éste varía a través del tiempo?	
• interpretar la razón de cambio como la pendiente de una pareja de puntos localizados en el plano o como la pendiente de la recta secante en la resolución de problemas de física en situaciones del entorno?	
• argumentar e interpretar la razón de cambio como un límite, obtener su representación algebraica y como consecuencia reconocer a este límite como la derivada de la función en resolución de problemas de su entorno?	
• resolver gráfica y algebraicamente derivadas para solucionar problemas de física, química, naturales, sociales, económicos, administrativos y financieros dentro de su ámbito inmediato?	
• interpretar, analizar y argumentar que la segunda derivada de una función es igual a la aceleración de un móvil en la resolución de problemas de física en el contexto de tu vida cotidiana?	

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	
¿Al finalizar el bloque desarrollaste actividades que te permiten	
• interactuar con los elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo y enlistar sus características y consecuencias antes y después del cambio y aportar opiniones al respecto?	

• analizar las investigaciones sobre producciones agrícolas e identificar el año de mayor producción, el de menor producción, calcular la producción promedio y emitir una conclusión para socializar en el grupo?	
• analizar, interpretar y argumentar la razón de cambio promedio en inversiones a interés simple y compuesto, en la producción de acero, en la cantidad de contaminantes en la atmósfera, la cantidad de basura que se genera en una ciudad o en tu colonia, en el calentamiento global, en el número de artesanías que se venden en un determinado tiempo, entre otras situaciones de tu entorno?	
• realizar pequeños experimentos lanzando una pelota al aire, midiendo tiempo y la distancia recorrida, describir el cambio de la velocidad y la distancia recorrida por la pelota en pequeños intervalos de tiempo y en un tiempo determinado. Establecer el modelo matemático que describe el movimiento?	
• seleccionar un software para resolver problemas económicos, administrativos, naturales, sociales, de producción agrícola e industrial, representar la solución mediante gráficas, tablas, aritmética y algebraicamente, explicar la razón de cambio, razón de cambio promedio, velocidad instantánea y aceleración?	
• interpretar la derivada como la recta tangente a una curva en la resolución de problemas cotidianos?	
• realizar lecturas y resolver ejercicios en Internet?	
• realizar en equipo una presentación en PowerPoint y socializar los desempeños que lograron a partir de las competencias desarrolladas durante el bloque?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.67. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el tema.

BLOQUE 4

Máximos y mínimos de una función

Ciclos de Milankovich. Son efectos térmicos máximos y mínimos, producto de las variaciones que tiene el grado de inclinación del eje de la Tierra.

Desempeños del estudiante al concluir el bloque

- Diseña envases (cilindros, cubos, prismas, esferas, entre otros) para diversos productos con volumen máximo.
- Interpreta gráficas que representan diversos fenómenos naturales, producciones agrícolas e industriales, identifica máximos y mínimos absolutos y relativos, y emite una conclusión.
- Establece modelos matemáticos y representaciones gráficas de producción de diversas empresas (manufacturera, de fabricación y elaboración de artesanías) para calcular máximos y mínimos de utilidad y emite juicios sobre su situación económica.
- Calcula máximos y mínimos en funciones algebraicas y trascendentes aplicando métodos algebraicos.

Objetos de aprendizaje

- Producciones, máximos y mínimos.
- Variaciones en las producciones, máximos y mínimos relativos.

Competencias a desarrollar

En este bloque el estudiante

- Interpreta y analiza gráficas de fenómenos meteorológicos (temperatura, humedad atmosférica, calentamiento atmosférico y cantidad de bióxido de carbono en la atmósfera) de su región e identifica los máximos y mínimos absolutos.
- Construye e interpreta modelos matemáticos sencillos sobre el comportamiento de un móvil en un tiempo determinado y calcula máximos y mínimos absolutos y relativos.
- Valora el uso de las TIC´s en el modelado y simulación de situaciones problemáticas de fenómenos físicos, químicos, ecológicos, de producciones agrícolas, industriales, artesanales y de manufactura, emitiendo juicios de opinión.
- Calcula máximos y mínimos de funciones algebraicas e interpreta los máximos relativos y puntos de inflexión en gráficas que modelan la resolución de problemas de su entorno.

Estrategias de enseñanza

- Presente gráficas de los elementos del clima y de sus factores, para analizar los cambios en el tiempo.
- Oriente y guíe sobre la interpretación gráfica de problemas físicos mediante el software derive, para identificar máximos y mínimos relativos y absolutos en un periodo determinado y en situaciones problemáticas del entorno.
- Promueva el trabajo cooperativo, colaborativo, la tolerancia, responsabilidad y respeto, para realizar una investigación y explicar el cambio climático que se ha dado en los últimos 50 años en su comunidad.
- Promueva la investigación de lo que se produce en su región en los últimos 15 años, a la fecha, para que el estudiante resuelva problemas algebraicos.
- Oriente la búsqueda de información en Internet.

- Explique a los estudiantes cómo se construyen objetos con volúmenes máximos y proporcione las herramientas necesarias para que ellos construyan los propios.
- Propicie un ambiente dinámico y creativo donde se despierte el interés de los alumnos e identifiquen las competencias que desarrollaron durante el bloque.

Estrategias de aprendizaje

- Interpreta y analiza gráficas sobre el comportamiento de los elementos del clima 50 años atrás, investiga en Internet las gráficas e identifica máximos y mínimos y enlista sus características y consecuencias en ese periodo.
- Plantea modelos matemáticos en problemas de física que describen variaciones en el tiempo, realiza la representación gráfica en derive, calcula máximos y mínimos absolutos y relativos.
- Analiza los problemas del clima de los últimos 50 años e identifica algunos elementos de su entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo, elabora una lista de sus características y consecuencias antes y después del cambio, explica los resultados que obtuvo destacando la importancia que tiene este análisis de información en el medio ambiente.
- Resuelve problemas algebraicos sobre la producción agropecuaria existente en su región geográfica (maíz, arroz, papa cebolla, ganado vacuno, caprino, criadero de pollos, etc.) de 15 años a la fecha, identificando los máximos y mínimos de producción y explica el procedimiento que realizó para obtener los resultados correctos.
- Realiza lecturas y analiza videos referentes al tema en Internet. Elabora un resumen de las páginas electrónicas visitadas. Se sugieren las siguientes direcciones electrónicas

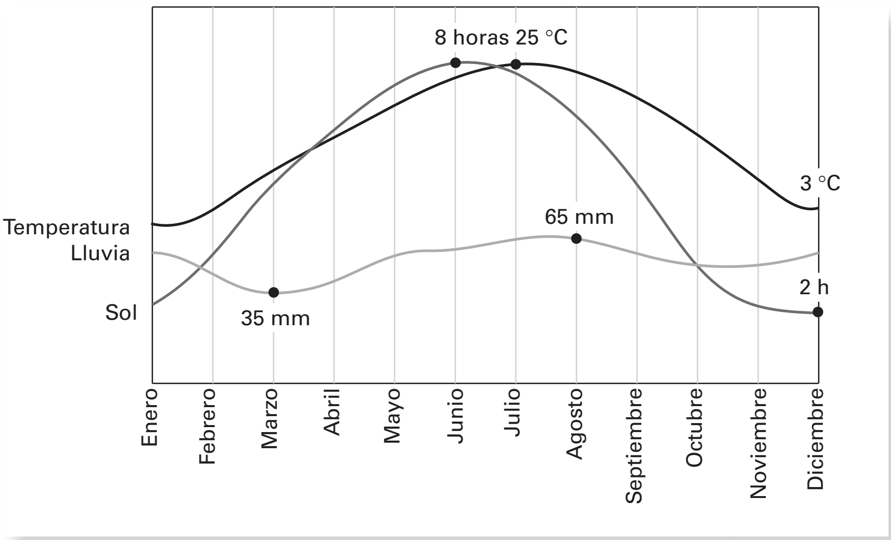
  http://www.youtube.com/watch?v=wMBg9toM94Q&feature=related
  http://usuarios.multimania.es/calculodiferencial/id91
  http:/www.vitutor.com/fun/5/x e.html

- Construye cajas, ceniceros o portaclips rectangulares, con hojas tamaño carta que contengan un volumen máximo, presenta a sus compañeros y emite de forma respetuosa su opinión sobre el trabajo de los demás.
- Hace una puesta en común o mesa redonda sobre los aprendizajes logrados en el bloque, a partir del análisis de las competencias desarrolladas y las temáticas; y argumenta la importancia que tiene el estudio del cálculo como herramienta de trabajo en cualquier situación de su vida y cómo influye para el éxito o fracaso de diferentes tipos de producción.

Desarrolla tus competencias

1. La gráfica de la figura muestra el clima de una importante ciudad con inviernos fríos y lluvias durante todo el año. Obsérvala detenidamente y contesta las siguientes cuestiones.

a) ¿Cuáles son los valores de la temperatura mínima, media y máxima?
b) ¿Qué valores tienen las precipitaciones pluviales mínima y máxima?
c) ¿Cuál mes es el más cálido y qué valor tiene la pendiente en la máxima temperatura?
d) ¿Cuáles gráficas guardan mas proporcionalidad entre ellas? ¿Por qué?
e) ¿Qué valor tienen las pendientes de todas las curvas en sus valores máximos o mínimos?

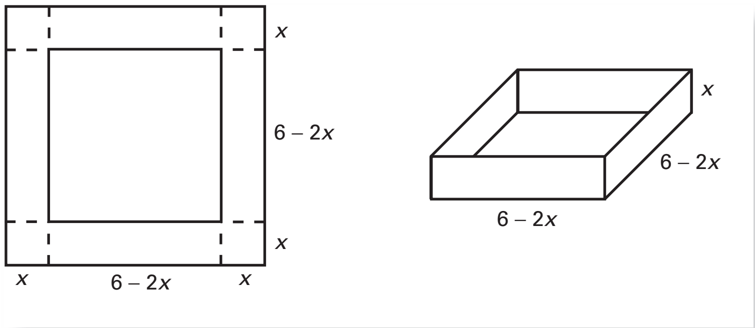


Trabajo de investigación

- Consulta en la red acerca del último informe del clima mundial.
- Desde el punto de vista histórico, ¿son normales los valores extremos que ha observado el clima últimamente?
- ¿Cómo es la tendencia de la temperatura del planeta Tierra en los últimos 50 años?
- ¿Cuál es el elemento en la atmósfera que contribuye de manera muy significativa al calentamiento global?
- ¿Qué responsabilidad tenemos los seres humanos para disminuir el ritmo del calentamiento global?

2. Se desea diseñar una caja cuadrada abierta por arriba cortando cuadrados de lado x de las esquinas de una pieza de cartón que mide 6 por 6 pulgadas, como se muestra en la figura.

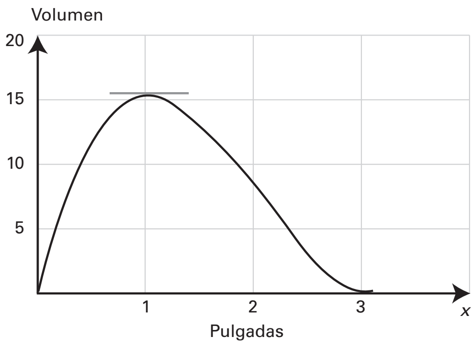
a) Escribe un modelo, o expresión, para encontrar el volumen de la caja.
b) Calcula el valor de x para encontrar las dimensiones de la caja de mayor volumen.



Secuencia didáctica

- Para encontrar el modelo algebraico que calcule el volumen V de la caja, observa la figura y fíjate que tienes que multiplicar el área de la base $(6 - 2x)^2$ por la altura x.
- Verifica que tu modelo matemático corresponda a la gráfica mostrada abajo, dándole valores a x en el intervalo $0 < x < 3$.
- Si es así, podrás comprobar que la *derivada* o *pendiente* de la curva $\frac{dV}{dx} = 0$ para la caja de volumen **máximo**.
- Escribe y resuelve la ecuación resultante de igualar a cero la derivada.
- Uno de los valores obtenidos en la solución de la ecuación corresponde a la x de los cuadros de las esquinas que se tienen que cortar para obtener las medidas de la caja de mayor volumen.
- Escribe tus conclusiones.

x	V
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
3	



Problemas de optimización

Las situaciones didácticas con las que iniciamos esta temática se refieren a algunas de las aplicaciones más importantes de cálculo diferencial que se presentan cuando queremos encontrar la mejor manera de hacer algo. Una persona que hace negocios, desea **maximizar** sus utilidades y **minimizar** sus costos. De manera que en esta sección resolveremos situaciones de diseño de figuras geométricas para maximizar su área o volumen, o minimizar gastos, distancias y tiempos. Generalmente en matemáticas uno de los mayores retos es traducir una situación del lenguaje cotidiano en una ecuación o modelo matemático que permita encontrar la optimización de una función o un recurso.

Para tal propósito considera la siguiente secuencia como un sistema de acceso a la solución de problemas de optimización.

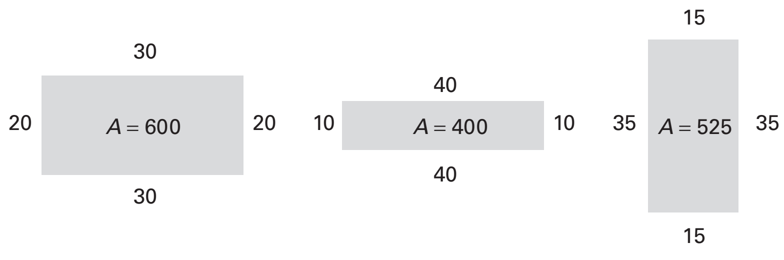
Comprende el problema. → Si es necesario haz un modelo gráfico. → Relaciona las variables en una ecuación. → Deriva la ecuación. → Iguala a cero la derivada y resuelve.

Ejemplos

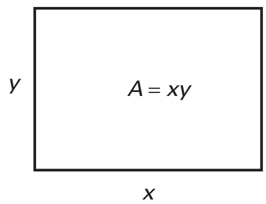
1. Un rectángulo tiene 100 cm de perímetro y se desea expresar su área A como función de la base x. También se quiere calcular la medida de la *base* y de la *altura* que nos da la figura de mayor superficie.

Solución

De la infinidad de soluciones que hay, escogemos tres posibles rectángulos cuyo perímetro es 100 cm para tener idea de lo que ocurre en el problema.



A fin de conocer las medidas del rectángulo, veamos la siguiente figura y relacionemos las variables en cuestión.



El perímetro del rectángulo es $2x + 2y = 100$

Dividiendo entre 2 $x + y = 50$

Despejando y $y = 50 - x$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

El área del rectángulo de base x y altura y es:

$$A = xy$$

Al sustituir el valor de y $\quad A = x(50 - x)$

Ya tenemos el área A en función de x $\quad A = 50x - x^2$

En la ecuación anterior derivamos A con respecto a x

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 2x$$

Hasta ahora hemos aprendimos que generalmente cuando una función tiene un **máximo** o un **mínimo**, su pendiente es horizontal y como consecuencia es igual a 0; por tanto,

$$50 - 2x = 0$$

$$x = \frac{50}{2} = 25 \qquad \text{Resolviendo para } x.$$

Entonces $\quad y = 50 - x = 50 - 25 = 25$

Significa que tanto la base como la altura del rectángulo deben medir 25 cm para obtener la mayor área.

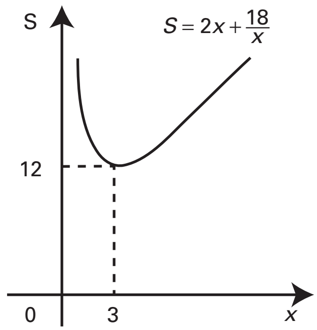
2. Encontrar dos números positivos de manera tal que la suma del doble de uno más el otro, sea mínima, si el producto de dichos números es 18.

Solución

Sea x un número y el otro sea y, entonces la suma S del doble de uno más el otro (que deseamos sea mínima) es

$$S = 2x + y$$

Pero sabemos que $xy = 18$, por tanto $y = \frac{18}{x}$; como la suma S es la que deseamos minimizar, sustituimos y en su ecuación,



$$S = 2x + \frac{18}{x} \qquad \text{para} \qquad x > 0$$

Derivamos $S = 2x + \frac{18}{x}$

$$S' = 2 - \frac{18}{x^2}$$

Igualamos a cero la derivada S'

$$2 - \frac{18}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 18 = 0 \qquad \text{Multiplicando por } x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3 \qquad \text{Resolviendo para } x$$

Por tanto, $$y = \frac{18}{x} = \frac{18}{3} = 6$$

Los números buscados son 3 y 6, porque de todos los números cuyo producto es 18, son los únicos que dan la suma mínima 2(3) + 6 = 12. (Ver gráfica).

3. Se desea construir una caja rectangular abierta por arriba cortando cuadrados de lado x de las esquinas de una pieza de cartón que mide 12 por 16 pulgadas, doblando después los lados (ver figura). ¿Cuánto debe ser el valor de x para que la caja tenga el mayor volumen posible? ¿Cuál es ese volumen máximo?

Solución

El volumen de la caja es:

$$V = (16 - 2x)(12 - 2x)x$$

$$V = 4x^3 - 56x^2 + 192x$$

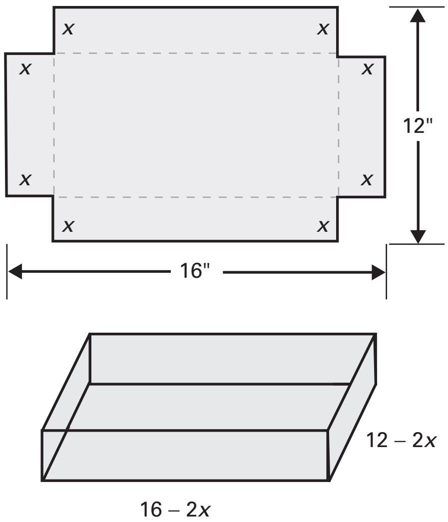
La derivada del volumen es:

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 112x + 192$$

Cuando V es máximo,

$$12x^2 - 112x + 192 = 0$$

$$3x^2 - 28x + 48 = 0 \qquad \text{Dividiendo entre 4.}$$



$$x = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4(3)(48)}}{2(3)} = \frac{28 \pm 14.42}{6}$$

$$\cancel{x = 7.07} \qquad \text{y} \qquad x = 2.26$$

Por la naturaleza del problema sólo la solución $x = 2.26$ es factible. Esto es porque $x = 7.07$ es una raíz absurda ya que la pieza de cartón se partiría de forma que no habría caja.

(*Continúa*)

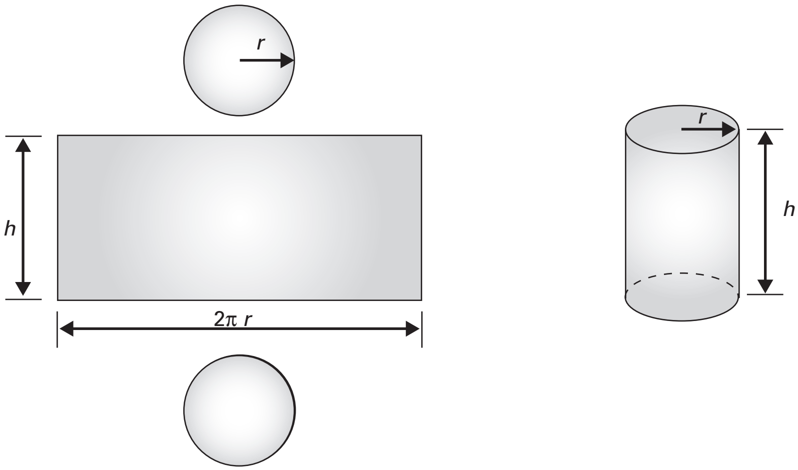
(*Continuación*)

El volumen máximo es:

$$V = 4(2.26)^3 - 56(2.26)^2 + 192(2.26) = 194.06 \text{ pulgadas cúbicas.}$$

4. Se va a diseñar una lata cilíndrica de 375 mL de capacidad. ¿Cuáles son las dimensiones que minimizan el costo del material para su fabricación?

Solución
Para fabricar la lata cilíndrica se necesitan los siguientes componentes: dos tapas circulares de radio r y un rectángulo cuya base es el perímetro del círculo $2\pi r$ y altura h.



Para minimizar el costo es necesario minimizar el área superficial total del cilindro, la cual es:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

En esta ecuación sustituimos h a sabiendas de que se conoce el volumen de 375 cm^3 (1 mL = 1 cm^3) de la lata.

$$\pi r^2 h = 375 \qquad \text{entonces} \qquad h = \frac{375}{\pi r^2}$$

Por tanto, la ecuación del área total superficial que deseamos minimizar es:

$$A = 2\pi r\left(\frac{375}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = \frac{750}{r} + 2\pi r^2$$

Para encontrar las soluciones, derivamos A.

$$A'(r) = -\frac{750}{r^2} + 4\pi\, r$$

Pero $A'(r) = 0$ cuando el área total del cilindro es mínima.

$$-\frac{750}{r^2} + 4\pi\, r = 0$$

$$-750 + 4\pi\, r^3 = 0 \qquad \text{Multiplicando por } r^2$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{750}{4\pi}} = 3.90 \text{ cm}$$

El valor de h lo obtenemos sustituyendo $r = 3.90$ en $h = \dfrac{375}{\pi\, r^2}$

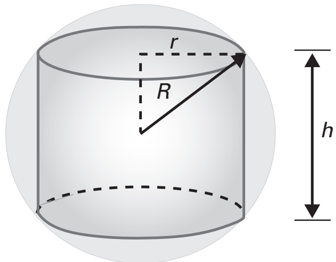
$$h = \frac{375}{\pi\, r^2} = \frac{375}{\pi(3.90)^2} \approx 7.82 \text{ cm}$$

Este resultado nos dice que para minimizar el costo de la lata, entonces el radio $r = 3.90$ cm es prácticamente la mitad de la altura $h = 7.82$ cm.

5. En la figura se muestra un cilindro inscrito en una esfera de radio $R = 3$. Encuentra las dimensiones del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir.

Solución

Sean r el radio del cilindro y h su altura. Queremos hallar el volumen máximo de:



$$V = \pi\, r^2 h$$

Recordando el teorema de Pitágoras (ver figura) vemos que:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = 3^2 - \frac{h^2}{4} \qquad \text{Despejando } r^2.$$

Como queremos maximizar $V = \pi\, r^2 h$, sustituimos r^2 y enseguida derivamos con respecto a h.

$$V = \pi\left[3^2 - \frac{h^2}{4}\right]h = \pi\left[9h - \frac{h^3}{4}\right]$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$$\frac{dV}{dh} = \pi\left[9 - \frac{3h^2}{4}\right]$$

Haciendo la derivada $\frac{dV}{dh} = 0$, tenemos:

$$\pi\left[9 - \frac{3h^2}{4}\right] = 0$$

Despejamos h.

$$h = \sqrt{\frac{9(4)}{3}} = \sqrt{12}$$

Calculamos r.

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = 9 - \frac{\left(\sqrt{12}\right)^2}{4} = 9 - 3 = 6, \qquad \text{entonces} \qquad r = \sqrt{6}$$

Las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio $R = 3$ son:

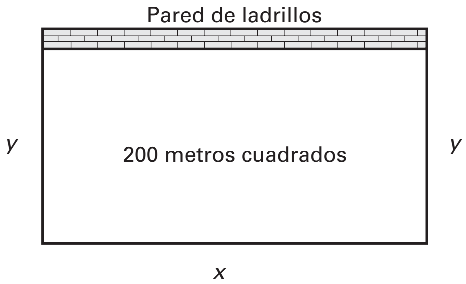
$$r = \sqrt{6} \qquad \text{y} \qquad h = \sqrt{12}$$

Evidencias de aprendizaje

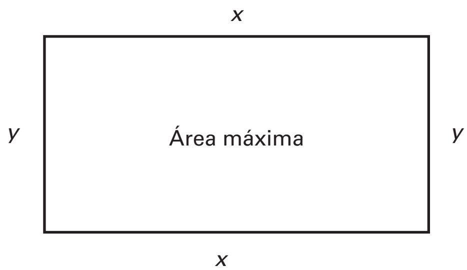
1. Completa las celdas de la siguiente tabla para hallar el valor máximo del producto de dos números $P = xy$ suponiendo que x y y son positivos y que $x + y = 50$.

Suma	Despeja y de la suma	Sustituye y en el producto $P = xy$
$x + y = 50$	$y =$	$P = x(\qquad\qquad)$
Encuentra $\frac{dP}{dx}$	**Iguala a 0 la derivada** $\frac{dP}{dx}$	**Resuelve para x y para y**
$\frac{dP}{dx} =$		

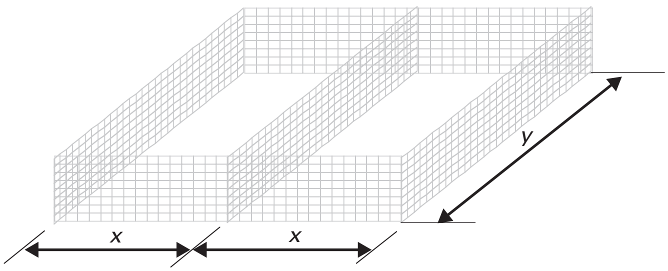
2. Una pequeña huerta de 200 m^2 ha de ser cercada para protegerla de los conejos. Hallar las dimensiones que requerirán la menor cantidad de cerca si un lado de la huerta está ya protegida por una construcción.



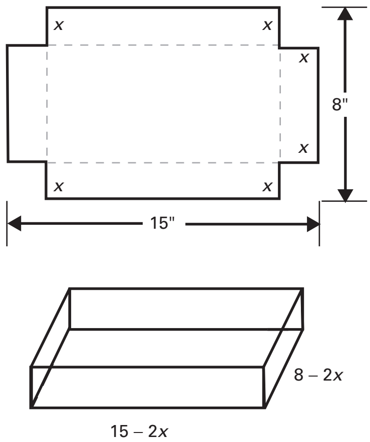
3. Encuentra las dimensiones de un rectángulo de área máxima y perímetro 50.



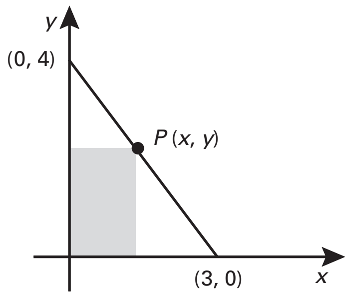
4. Un granjero dispone de 200 pies de cerca para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares. ¿Qué dimensiones debe elegir para que el área encerrada sea máxima?



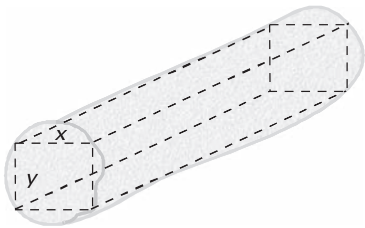
5. Se desea construir una caja rectangular abierta por arriba cortando cuadrados de lado x de las esquinas de una pieza de cartón que mide 8 por 15 pulgadas, doblando después los lados. ¿Cuánto debe ser el valor de x para que la caja tenga el mayor volumen posible? ¿Cuál es ese volumen máximo?



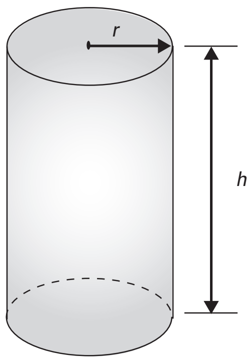
6. Hallar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que maximice el área del rectángulo representado en la figura. Analiza la figura y observa que, por proporcionalidad, $\dfrac{4-y}{x} = \dfrac{y}{3-x} = \dfrac{4}{3}$.



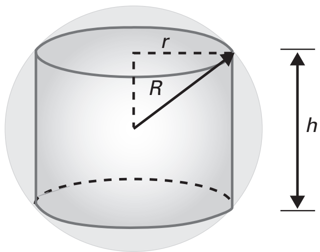
7. Una viga en su sección transversal rectangular mide x por y. Si la resistencia R de la viga es proporcional al producto x^2y, ¿cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar a partir de un tronco cilíndrico de 1 m de diámetro?



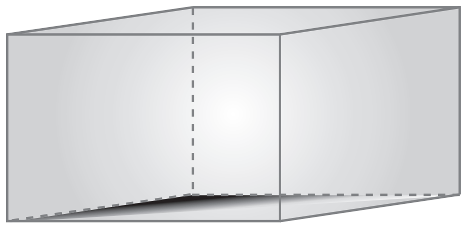
8. Diseña un envase cilíndrico con capacidad de 300 cm^3 de forma que la cantidad de material utilizado en su construcción sea mínima.



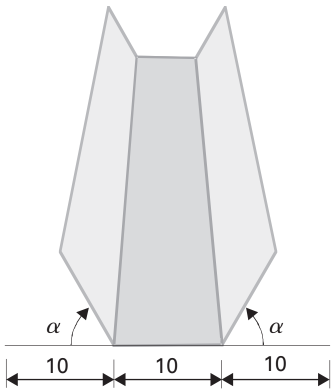
9. En la figura se muestra un cilindro inscrito en una esfera de radio R = 4. Encuentra las dimensiones del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir.

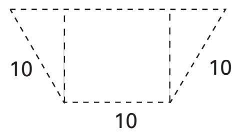


10. Si se cuenta con 1200 cm^2 de material para construir una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentra el volumen máximo posible de la caja.

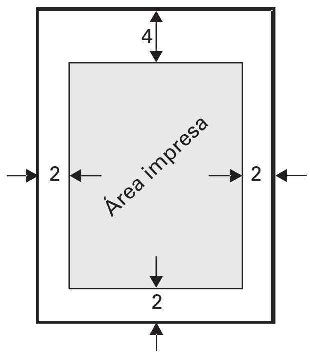


11. Se desea construir un canalón para lluvia a partir de una lámina metálica que tiene 30 cm de ancho, doblando la tercera parte de la lámina de cada lado hasta que forme un ángulo α. ¿Cómo debe elegirse α para que el canalón lleve la mayor cantidad de agua? (Observa la forma geométrica del canalón).





12. El área del papel de un tríptico debe tener 600 cm^2, con márgenes inferior y laterales de 2 cm y superior de 4 cm. Determina las dimensiones del papel que permitan la mayor área impresa.



Aplicaciones a la economía

Antes de abordar los ejemplos de la aplicación de la derivada en la economía vamos a definir los siguientes conceptos.

Función de costo $C(x)$. Es el costo de producir x unidades de cierto producto.

Costo marginal. Es la razón de cambio de $C(x)$ con respecto a x, es decir, la derivada $C'(x)$ de la función de costo.

Costo promedio. Es el costo por unidad cuando se producen x unidades.

$$c(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Función de ingreso total. Es la venta de x unidades al precio por unidad o **función de demanda** o **función de precio** $p(x)$, entonces el ingreso total es:

$$R(x) = xp(x)$$

Función de ingreso marginal. Es la derivada $R'(x)$ de la función de ingreso.

Utilidad total $P(x)$. Si se venden x unidades de un producto, la utilidad total se obtiene mediante la expresión,

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Función de utilidad marginal. Es la derivada $P'(x)$ de la función de utilidad total.

Ejemplos

1. Una compañía estima que el costo en dólares para producir x artículos es:

$$C(x) = 1000 + x + 0.0004x^2$$

a) Encuentra el costo, el costo promedio y el costo marginal para producir 100 artículos.

b) ¿A cuál nivel de producción el costo promedio será el más bajo y cuál es el costo promedio mínimo?

Solución

a) El costo de producir 100 artículos es,

$$C(100) = 1000 + (100) + 0.0004(100)^2 = 1104 \text{ dólares}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

La función de costo promedio es $c(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{1000}{x}+1+0.0004x$, pero para 100 se puede calcular así:

$$c(100)=\frac{C(100)}{100}=\frac{1104}{100}=11.04 \text{ dólares por artículo}$$

La función de costo marginal es la derivada de $C(x)=1000+x+0.0004x^2$, es decir:

$$C'(x)=1+0.0008x$$

por tanto, $C'(100)=1+0.0008(100)=1.08$ dólares por artículo.

b) Para minimizar el costo promedio, debemos derivar el costo promedio.

$$c(x)=\frac{1000}{x}+1+0.0004x$$

Enseguida igualar a cero y resolver para x:

$$c'(x)=-\frac{1000}{x^2}+0.0004$$

$$-\frac{1000}{x^2}+0.0004=0 \qquad \text{al igualar a cero}$$

$$x=\sqrt{\frac{1000}{0.0004}}\approx 1581 \qquad \text{al despejar } x$$

Por tanto, el costo promedio mínimo es:

$$c(1581)=\frac{1000}{1581}+1+0.0004(1581)\approx 2.26 \text{ dólares por artículo.}$$

2. Encuentra el nivel de producción que maximizará la utilidad para una compañía con funciones de costo y demanda:

$$C(x)=1000+15x-0.12x^2+0.00084x^3 \qquad p(x)=42-0.12x$$

Solución
La función de ingreso es:

$$R(x)=xp(x)=x(42-0.12x)=42x-0.12x^2$$

De modo que la función de utilidad es:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 42x - 0.12x^2 - \left(1000 + 15x - 0.12x^2 + 0.00084x^3\right)$$

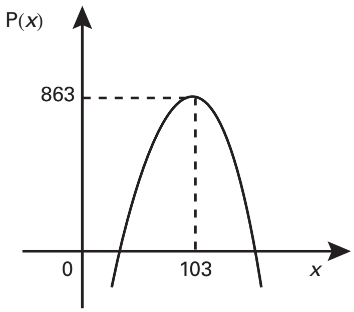
$$= 27x - 0.00084x^3 - 1000$$

Entonces, la utilidad marginal es la derivada de la función de utilidad,

$$P'(x) = 27 - 0.00252x^2$$

$27 - 0.00252x^2 = 0$ al igualar a cero.

$x \approx 103$ al resolver para x.



Esto significa que un nivel de producción de 103 unidades maximiza la utilidad. (Ver gráfica).

3. Un comerciante ha vendido 150 pantallas a la semana a 500 dólares cada una. Cuando contrata un servicio de investigación de mercado se da cuenta de que por cada 20 dólares de descuento que ofrezca a los compradores, el número de aparatos vendidos se incrementará en 40 a la semana. Encuentra las funciones de demanda y de ingreso. ¿Cuánto debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?

Solución

Definimos como x las pantallas vendidas en una semana. Por tanto:

$x - 150$ es el incremento de pantallas vendidas.

$\frac{1}{40}(20)$ es la disminución en el precio por cada aparato.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Entonces estamos en condiciones de escribir una relación para la funcion de demanda o precio $p(x)$ de las pantallas.

$$p(x) = 500 - \frac{20}{40}(x - 150) = 575 - \frac{1}{2}x$$

La función de ingreso es:

$$R(x) = xp(x) = x\left(575 - \frac{1}{2}x\right) = 575x - \frac{1}{2}x^2$$

El ingreso es máximo cuando la derivada de $R(x)$ es cero, dado que es una parábola que abre hacia abajo,

$$R'(x) = 575 - x = 0$$

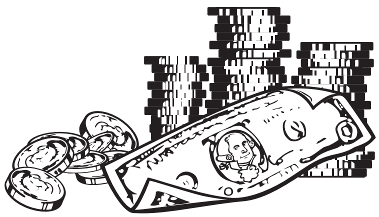
Esto ocurre cuando $x = 575$, de manera que el precio correspondiente para el ingreso máximo se puede calcular con $P(575)$

$$p(575) = 575 - \frac{1}{2}(575) = 287.5$$

El descuento es $500 - 287.5 = 212.5$ y significa que el comerciante debe ofrecer un descuento de 212.5 dólares para maximizar la ganancia.

Evidencias de aprendizaje

1. El costo promedio de producir x unidades de un artículo es $c(x) = 21.4 - 0.002x$. Encuentra el costo marginal a un nivel de producción de 100 unidades. ¿Cuál es el significado de tu respuesta?

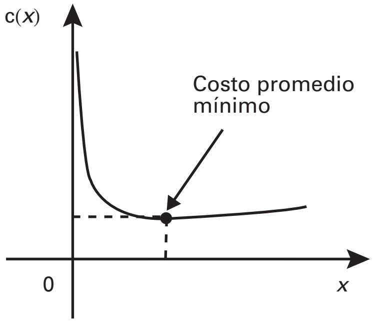


2. Una compañía estima que el costo en dólares para producir x artículos es:

$$C(x) = 19200 + 96x + 0.12x^2$$

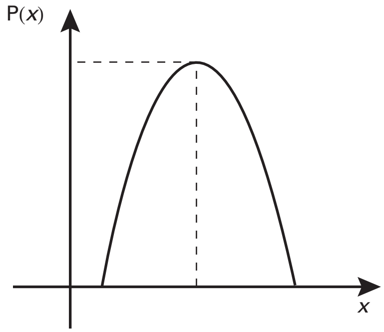
Encuentra:

a) El costo, el costo promedio y el costo marginal para producir 1000 unidades.
b) El nivel de producción que minimizará el costo promedio.
c) El costo promedio mínimo.



3. Para las funciones de costo y demanda dadas, encuentra el nivel de producción que maximizará la utilidad.

$$C(x) = 680 + 4x + 0.01x^2 \qquad p(x) = 12 - x/500$$



Función de utilidad

4. Para las funciones de costo y demanda dadas, encuentra el nivel de producción que maximizará la utilidad.

$$C(x) = 12000 + 336x - 0.12x^2 - 0.02x^3 \qquad p(x) = 1080 - 0.24x$$

5. Un productor de teléfonos celulares ha vendido 700 aparatos por semana a 350 dólares cada uno. Una investigación de mercado mostró que por cada 10 dólares de descuento que ofrezca, el número de aparatos vendidos se incrementará en 80 por semana.

a) Encuentra la funcion de demanda.

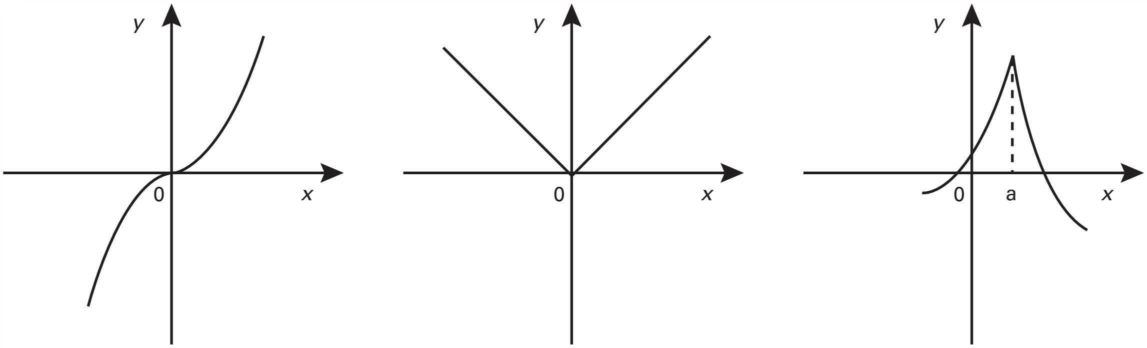
b) ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía para maximizar su ingreso?

6. En un teatro con una capacidad de 1600 espectadores y con precio de los boletos a 10 dólares cada uno, se registró una asistencia promedio de 1000 asistentes. Cuando el precio bajó hasta 8 dólares, la asistencia promedio subió hasta 1400.

a) Encuentra la función de demanda, suponiendo que es lineal.
b) ¿Cuál es el precio que debe establecerse para los boletos de manera que se maximice el ingreso?

Más de máximos y mínimos

Hasta aquí hemos estudiado sólo la aplicación de la derivada para funciones que por su naturaleza tienen máximos y mínimos relativos, en donde la derivada siempre es horizontal y, por tanto, igual a cero. Sin embargo, ahora hay que preguntarnos si existen métodos más exhaustivos que nos garanticen cómo encontrar los **máximos o mínimos** de una función. Y es que hay funciones con valores extremos en donde la derivada no es cero, o bien, donde la derivada en un punto de una gráfica sea igual a cero, y la función no sea un valor máximo o un valor mínimo.



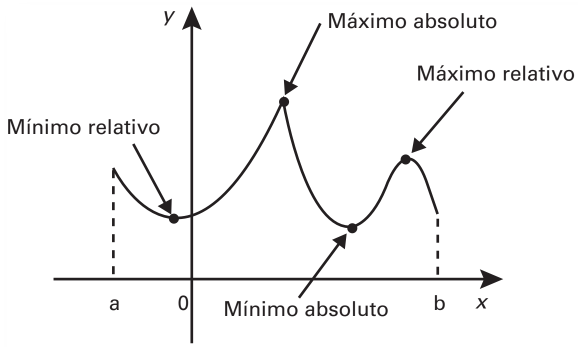
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$ pero f no tiene máximo ni mínimo.

Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero en ese punto la derivada no existe.

Esta función tiene un valor máximo en $x = a$, pero la derivada no existe en ese punto.

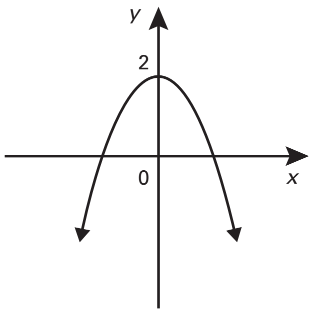
> **Definición.** Una función f posee un **máximo local** (o máximo relativo) en un valor crítico c si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a c. De la misma manera, f tiene un **mínimo local** (o mínimo relativo en c si $f(c) \leq f(x)$, cuando x está cerca de c.

Una función puede tener uno o más valores máximos y/o mínimos relativos en un intervalo (a, b), pero sólo un **máximo absoluto** mayor que todos y un **mínimo absoluto** menor que todos, o sólo alguno, o ninguno de los dos.

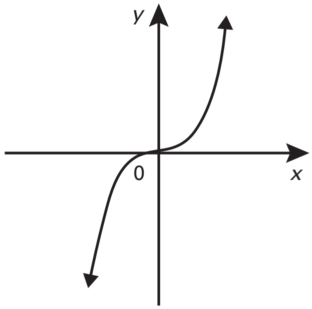


Ejemplos

1. La función $y = 2 - x^2$ tiene un solo valor máximo absoluto y local en $x = 0$ dado que $f(0) = 2$ es el valor más grande que adquiere el rango. Como podemos observar en la gráfica de la parábola, no existe el punto mínimo.

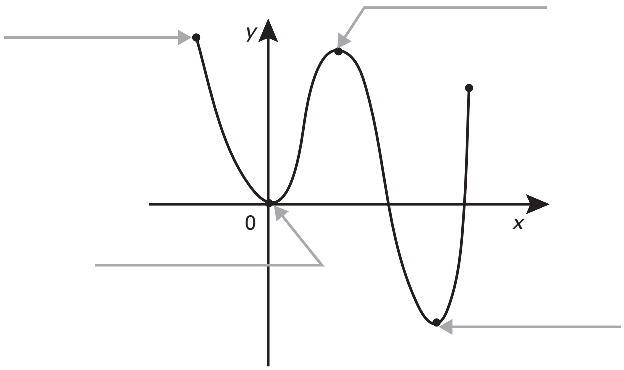


2. La función $y = x^3$ no tiene valores máximos ni mínimos de ninguna clase. Observa la gráfica.



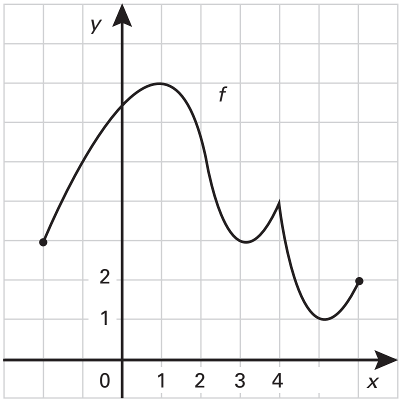
Autoevaluación

1. Escribe en la línea de cada flecha si el punto señalado es un máximo o un mínimo local o absoluto o ambos.

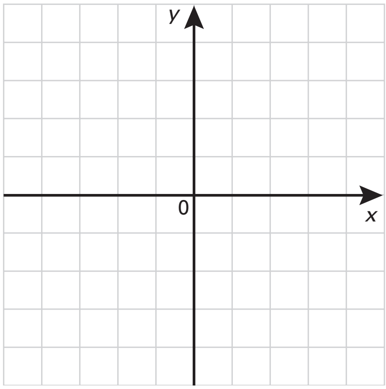


2. Dada la grafica de la función f, utilízala para escribir en la tabla los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

Máximos		**Mínimos**	
Absolutos	Locales	Absolutos	Locales



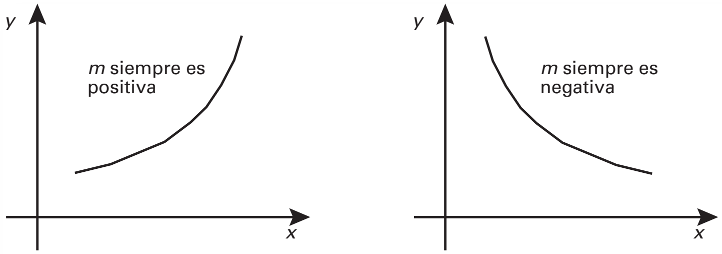
3. Dibuja una gráfica continua que cumpla con las siguientes condiciones: máximo absoluto en –2, mínimo absoluto en 4, mínimo local en 0 y máximo local en 2.



Ya estamos en condiciones de contestar la siguiente pregunta: ¿cómo encontrar un método para analizar los máximos y/o mínimos relativos en la gráfica de una función que nos garantice que existen?

Funciones creciente y decreciente

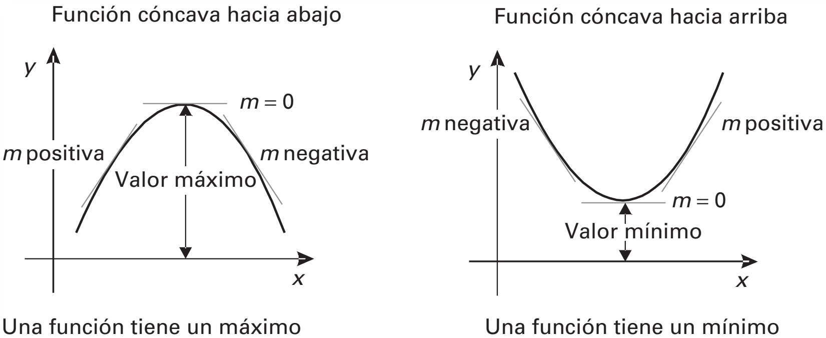
Comencemos por analizar si las funciones son crecientes o decrecientes y observemos cómo es la pendiente o derivada en cada punto de las gráficas.



Función creciente. Es una función en la cual si x crece también lo hace y. Su **derivada** o pendiente siempre es **positiva**.

Función decreciente. Es una función en la cual si x crece, la y decrece. Su **derivada** o pendiente siempre es **negativa**.

Ahora bien, si complementamos los conceptos de funciones creciente y decreciente de las gráficas anteriores al analizar la concavidad de una curva, veremos que una *curva cóncava hacia abajo* sin lugar a duda tiene un valor **máximo**; además, su derivada cambia de **positiva a negativa**, es decir, decrece. Asimismo, en una *curva cóncava hacia arriba* tiene un **mínimo** y la derivada cambia de **negativa a positiva**, es decir, crece. Esta idea nos da la pauta para encontrar un criterio que nos garantice cómo encontrar los valores extremos de una función.



Una función tiene un máximo relativo cuando su pendiente es cero y su derivada pasa de ser positiva a ser negativa haciendo el recorrido de izquierda a derecha.

Una función tiene un mínimo relativo cuando su pendiente es cero y su derivada pasa de ser negativa a ser positiva haciendo el recorrido de izquierda a derecha.

Con lo antes dicho y el análisis de las ilustraciones anteriores, ya estamos en condiciones de formular el primer método para calcular los máximos y/o mínimos relativos de una función $y = f(x)$.

Cálculo de máximos y mínimos relativos con el criterio de la primera derivada

Criterio de la primera derivada para calcular los máximos y mínimos relativos de una función.

1. Calcular la derivada de $y = f(x)$.

2. Igualar a cero la derivada de $y = f(x)$ y resolver la ecuación; estas soluciones se llaman *valores críticos*.

3. Analizar el signo de $\frac{dy}{dx}$ un valor antes y uno después de cada valor crítico sin omitir alguno de ellos:

a) Si la derivada de $y = f(x)$ cambia de (+) a (–) se trata de un **máximo**.
b) Si la derivada de $y = f(x)$ cambia de (–) a (+) se trata de un **mínimo**.
c) Si no hay cambio de signo no es ni máximo ni mínimo.

4. Graficar.

Ejemplos

1. Calcular los máximos y mínimos de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ y después graficar.

Primero calculamos la derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

Igualamos a cero la derivada de la función

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

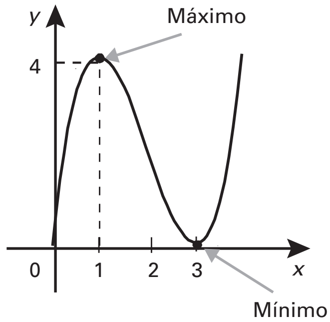
Al factorizar y resolver la ecuación, tenemos que,

$$3(x-3)(x-1) = 0,$$

Entonces los valores críticos son:

$x_1 = 1$ por tanto $y_1 = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4$

$x_2 = 3$ por tanto $y_1 = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 0$



Análisis del valor crítico $x_1 = 1$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Si $x < 1$, por ejemplo 0.9 entonces $\frac{dy}{dx} = 3(0.9-3)(0.9-1) = +$

Si $x > 1$, por ejemplo 1.1 entonces $\frac{dy}{dx} = 3(1.1-3)(1.1-1) = -$

Observa que sólo nos interesan los signos de la derivada.

Como la derivada cambia de positiva a negativa concluimos que en el punto (1, 4) hay un **máximo** relativo.

Análisis del valor crítico $x_2 = 3$

Si $x < 3$, por ejemplo 2.9 entonces $\frac{dy}{dx} = 3(2.9-3)(2.9-1) = -$

Si $x > 3$, por ejemplo 3.1 entonces $\frac{dy}{dx} = 3(3.1-3)(3.1-1) = +$

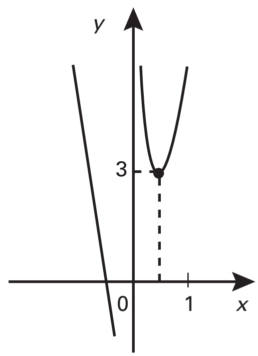
La derivada cambia de negativa a positiva, por lo que concluimos que en el punto (3, 0) hay un **mínimo** relativo.

Trazar la gráfica de la funcion es relativamente fácil, ya que es continua en todo su dominio. Además, como en (1, 4) existe un máximo, la curva es cóncava hacia abajo; y en (3, 0) hay un mínimo, por lo que la curva es cóncava hacia arriba. Con una tabla de valores calculamos puntos a la izquierda y derecha de estos puntos y los unimos con una línea suave.

2. Calcular los máximos y mínimos de la función $y = \frac{1}{x} + 4x^2$ y graficar.

Primero calculamos la derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + 8x$$



Igualamos a cero la derivada de la función.

$$-\frac{1}{x^2} + 8x = 0$$

Multiplicamos por $-x^2$

$$1 - 8x^3 = 0$$

Resolviendo la ecuación vemos que hay un solo valor crítico y es:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \quad \text{por tanto} \quad y = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 4\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

Análisis del valor crítico $x = \frac{1}{2}$

Si $x < \frac{1}{2}$, por ejemplo 0.4 entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(0.4)^2} + 8(0.4) = -$

Si $x > \frac{1}{2}$, por ejemplo 0.6 entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(0.6)^2} + 8(0.6) = +$

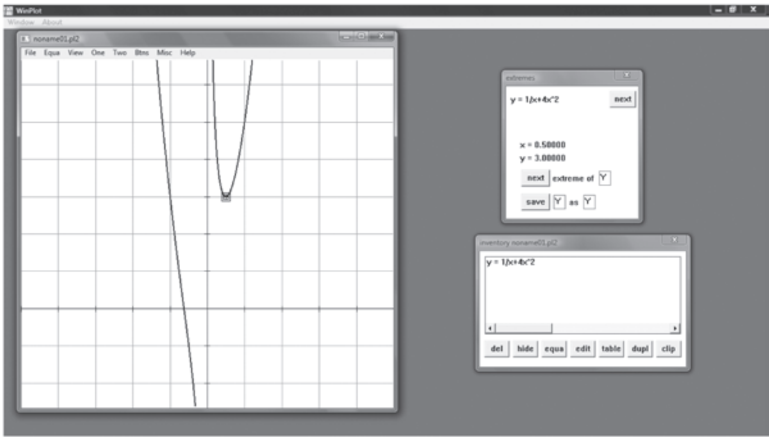
Observa que sólo nos interesan los signos de la derivada.

Como la derivada cambia de negativa a positiva concluimos que en el punto $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ hay un **mínimo** relativo.

Para trazar la gráfica hay que proceder como en el ejemplo anterior y tener en cuenta que la función $y = \frac{1}{x} + 4x^2$ no está definida para $x = 0$ ya que es una asíntota vertical.

Uso de un software. Una forma útil, fácil y práctica de corroborar tus resultados en esta clase de problemas es utilizar un programa de computadora, por ejemplo, **Winplot** el cual se puede descargar fácilmente en la red, ya que es gratis y muy amigable. Observa la secuencia para resolver la situación de la función $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

Winplot → 2 dim → Ecuación → y = 1/x + 4x^2 → Aplicar → Una → Extremos

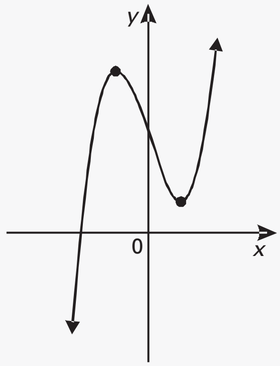


Evidencias de aprendizaje

Realiza los procesos necesarios para completar las celdas en cada una de las siguientes situaciones; el propósito es encontrar los valores extremos y, donde sea necesario, mostrar la gráfica de cada función.

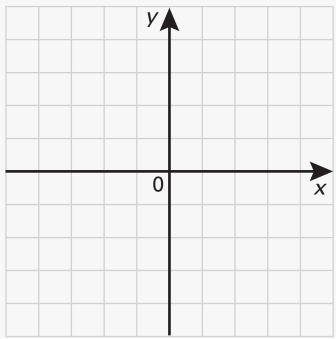
1. $y = x^3 - 3x + 3$

Deriva la función	Iguala la derivada a cero	Escribe los valores críticos

<table>
<tr><th rowspan="4">Analiza los valores críticos</th><th>Máximos</th><th>Mínimos</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Gráfica</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

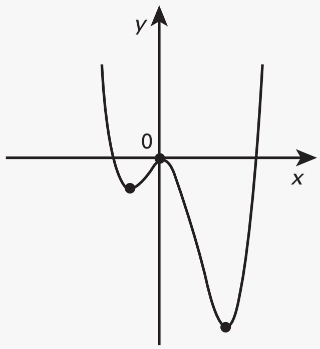
2. $y = x^4 - 4x^2$

Deriva la función	Iguala la derivada a cero	Escribe los valores críticos

Analiza los valores críticos	Máximos	Mínimos
	Gráfica	
		

3. $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

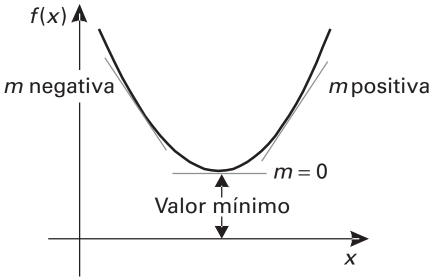
Deriva la función	Iguala la derivada a cero	Escribe los valores críticos

<table>
<tr><th rowspan="1">Analiza los valores críticos</th><th>Máximos</th><th>Mínimos</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Gráfica</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Concavidad y punto de inflexión

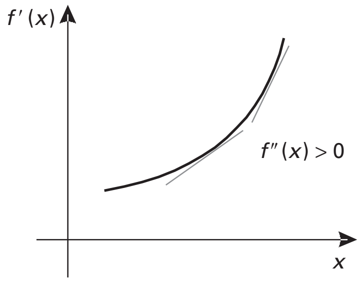
Concavidad de una curva. Cuando recorremos una curva de izquierda a derecha, y la tangente de ésta gira en cada punto en sentido contrario a las manecillas del reloj, se dice que la curva es **cóncava hacia arriba**; si gira en el mismo sentido que las manecillas del reloj, entonces la gráfica es **cóncava hacia abajo**.
Es evidente que la derivada de una función con concavidad hacia arriba es creciente, por tanto su segunda derivada es **positiva**. Luego, si la concavidad es hacia abajo, la primera derivada es decreciente y su segunda derivada es **negativa**. Por último, un cambio de concavidad se encuentra en un punto llamado **punto de inflexión**. Los diagramas siguientes nos ayudarán a comprender mejor todo esto.

Función cóncava hacia arriba



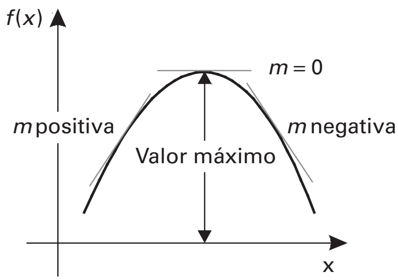
$f'(x)$ es creciente, luego $f''(x)$ es positiva y la función tiene un mínimo.

Gráfica de la primera derivada



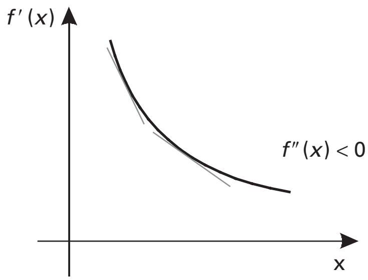
$f'(x)$ es creciente, luego $f''(x)$ es positiva.

Función cóncava hacia abajo



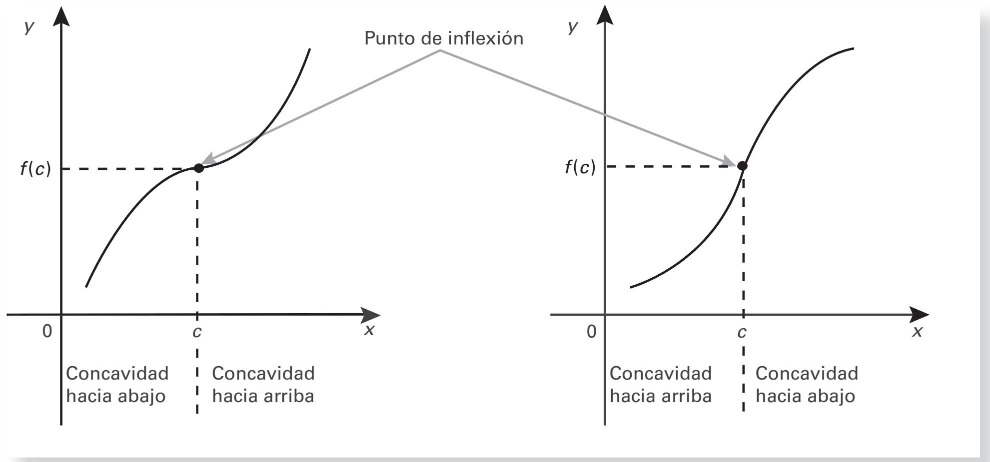
$f'(x)$ es decreciente, luego $f''(x)$ es negativa y la función tiene un máximo.

Gráfica de la primera derivada



$f'(x)$ es decreciente, luego $f''(x)$ es negativa.

Punto de inflexión. Una función f presenta un punto de inflexión en $(c. f(c))$ si es continua en ese punto y además separa dos arcos de concavidad opuesta. (Ver figura).



Cálculo de máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada

Si analizamos y sintetizamos estas ilustraciones podemos concluir un segundo método para calcular los máximos y mínimos de una función $y = f(x)$.

1. Calcular la primera derivada.
2. Encontrar los valores críticos.
3. Hallar la segunda derivada.
4. Evaluar la segunda derivada en cada uno de los valores críticos para conocer el signo de ésta:
   a) Si $f''(x)$ es negativa la función tiene un **máximo**.
   b) Si $f''(x)$ es positiva la función tiene un **mínimo**.
   c) Si $f''(x)$ es cero o no existe, generalmente es un **punto de inflexión**, pero puede ocurrir que exista un máximo o un mínimo, y en ese caso es mejor utilizar el primer criterio.
5. Graficar.

Ejemplos

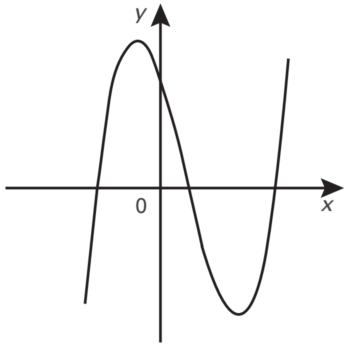
1. Hallar los valores máximos o mínimos de $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$

Solución
Derivando $f(x)$ tenemos:

$$f'(x)=x^2-2x-3$$

Igualamos a cero la derivada:

$$x^2-2x-3=0$$



Factorizando la ecuación:

$$(x-3)(x+1)=0$$

Los valores críticos son:

$$x_1=-1 \qquad \text{y} \qquad x_2=3$$

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x)=2x-2$$

Evaluamos $f''(x)$ en $x_1=-1$ y $x_2=3$

$$f''(-1)=2(-1)-2=-4$$

Es negativa, por tanto, hay un **máximo** ≈ 5.67 en $x=-1$.

$$f''(3)=2(3)-2=4$$

Es positiva, por tanto, hay un **mínimo** $=-5$ en $x=3$.

(*Continúa*)

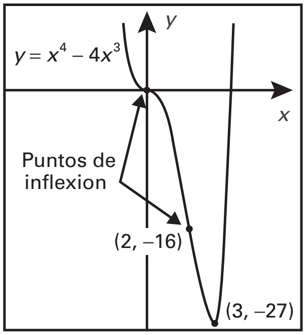
(*Continuación*)

2. Analiza la curva $y = x^4 - 4x^3$ y verifica la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales.

Solución
Obtenemos la primera derivada y los valores críticos.

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2\left(x-3\right)$$

$$4x^2\,(x-3) = 0, \quad \text{de donde} \quad x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 3$$



La segunda derivada es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x = 12x\left(x-2\right)$$

Si evaluamos la segunda derivada en $x_2 = 3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\left(3\right)\left(3-2\right) = 36 > 0$$

Significa que en el punto (3, –27) es un mínimo local.

Observa también que la segunda derivada en $x = 0$ y $x = 2$ es igual a cero, por tanto allí hay dos puntos de inflexión porque hay continuidad y las concavidades de la gráfica se comportan de la siguiente manera:

Intervalo	$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x\left(x-2\right)$	**Concavidad**
$x < 0$	positiva	hacia arriba
$0 < x < 2$	negativa	hacia abajo
$x > 2$	positiva	hacia arriba

Con el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión se puede graficar la curva.

Evidencias de aprendizaje

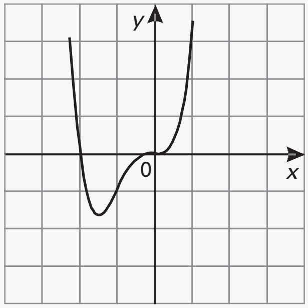
1. Halla los máximos y mínimos de $y = x^3 - 3x + 4$

Encuentra la primera derivada	Iguala la derivada a cero	Escribe los valores críticos

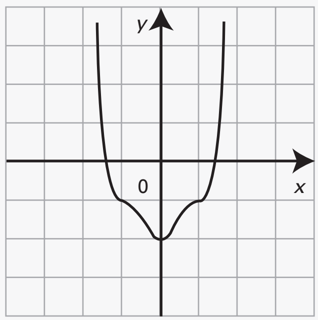
Encuentra la segunda derivada	Máximos	Mínimos

Evalúa la segunda derivada en los valores críticos	Gráfica

2. Analiza la curva $f(x) = x^4 + 2x^3$ y verifica la concavidad, puntos de inflexión, máximos y mínimos; corrobora que corresponde a la gráfica presentada.

<table>
<tr><th colspan="2">Encuentra la primera derivada</th><th colspan="2">Iguala la derivada a cero</th><th colspan="2">Escribe los valores críticos</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="3">Encuentra la segunda derivada</th><th colspan="2">Máximos</th><th>Mínimos</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="3">Utiliza el primer criterio para los máximos y mínimos</th><th colspan="3">Gráfica</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><th colspan="6">Comprueba la concavidad</th></tr>
<tr><th colspan="2">Intervalo</th><th colspan="2">Signo de la segunda derivada</th><th colspan="2">Concavidad</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

3. Analiza la curva $f(x)=(x^2-1)^3-1$ y verifica la concavidad, puntos de inflexión, máximos y mínimos; corrobora que corresponde a la gráfica presentada.

<table>
<tr><th>Encuentra la primera derivada</th><th colspan="2">Iguala la derivada a cero</th><th colspan="2">Escribe los valores críticos</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="2">Encuentra la segunda derivada</th><th colspan="2">Máximos</th><th>Mínimos</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Utiliza el primer criterio para los máximos y mínimos</th><th colspan="3">Gráfica</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><th colspan="5">Comprueba la concavidad</th></tr>
<tr><th>Intervalo</th><th colspan="2">Signo de la segunda derivada</th><th colspan="2">Concavidad</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 4

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anota en el cuadro el número correspondiente.

☹ **0** Nunca ☺ **5** Algunas veces ☺ **10** Siempre

COMPETENCIAS A DESARROLLAR	
¿Al finalizar el bloque adquiriste las competencias que te permiten	
• interpretar y analizar gráficas de fenómenos meteorológicos (temperatura, humedad atmosférica, calentamiento atmosférico y cantidad de bióxido de carbono en la atmósfera) de tu región e identificar los máximos y mínimos absolutos?	
• construir e interpretar modelos matemáticos sencillos sobre el comportamiento de un móvil en un tiempo determinado y calcular máximos y mínimos absolutos y relativos?	
• valorar el uso de las TIC´s en el modelado y simulación de situaciones problemáticas de fenómenos físicos, químicos, ecológicos, de producciones agrícolas, industriales, artesanales y de manufactura, emitiendo juicios de opinión?	
• calcular máximos y mínimos de funciones algebraicas e interpretar los máximos relativos y puntos de inflexión en gráficas que modelan la resolución de problemas?	

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	
¿Al finalizar el bloque desarrollaste actividades que te permiten	
• interpretar y analizar gráficas sobre el comportamiento de los elementos del clima 50 años atrás, investigar en Internet las gráficas e identificar máximos y mínimos y enlistar sus características y consecuencias en ese periodo?	
• plantear modelos matemáticos en problemas de física que describen variaciones en el tiempo, realizar la representación gráfica en derive, calcular máximos y mínimos absolutos y relativos?	

• analizar los problemas del clima de los últimos 50 años e identificar algunos elementos de tu entorno que sufren alguna modificación a través del tiempo, elaborar una lista de sus características y consecuencias antes y después del cambio, explicar los resultados que obtuvo destacando la importancia que tiene este análisis de información en el medio ambiente?	
• resolver problemas algebraicos sobre la producción agropecuaria existente en tu región geográfica (maíz, arroz, papa, cebolla, ganado vacuno, caprino, criaderos de pollo, etc.) de 15 años a la fecha, identificar los máximos y mínimos de producción y explicar el procedimiento que realizaste para obtener los resultados correctos?	
• realizar lecturas y analizar videos referentes al tema en Internet? elaborar un resumen de las páginas electrónicas visitadas?	
• construir cajas, ceniceros o portaclips rectangulares, con hojas tamaño carta que contengan un volumen máximo, presentar a tus compañeros y emitir su opinión de forma respetuosa sobre el trabajo de los demás?	
• hacer una puesta en común o mesa redonda sobre los aprendizajes logrados en el bloque, argumentando la importancia que tiene el estudio del cálculo como herramienta de trabajo en cualquier situación de tu vida y cómo influye para el éxito o fracaso de diferentes tipos de producción?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.1. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás al estudiar el tema.

Apéndice

Más reglas para derivar

Esta sección tiene el propósito de complementar el texto con más reglas de derivación que les permitan a los estudiantes transitar con mayor facilidad en un curso de *Cálculo diferencial* aun cuando ya existen excelentes software para tal propósito.

Además de las reglas de derivación que vimos en los bloques anteriores, abordaremos las derivadas de funciones logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas y, por supuesto, nuevas reglas que surgen a partir de las anteriores, como son: la derivada del producto y del cociente de funciones.

Regla del producto de funciones

La derivada del producto de dos funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$ viene dada por

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)\ -f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\lim_{\Delta h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Sugerencia: Es conveniente memorizar la regla del producto de la siguiente manera:

> *La primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función.*

Ejemplos

1. Encuentra la derivada de $y = x\left(x^2+1\right)$

Solución
Primero hacemos $f(x)=x$, entonces $f'(x)=1$, luego, $g(x)=x^2+1$, y $g'(x)=2x$

Aplicamos la regla del producto

$$\frac{dy}{dx} = x\left(2x\right)+\left(x^2+1\right)\left(1\right)$$

$$= 2x^2+x^2+1$$

$$= 3x^2+1$$

Ejemplo 2. Halla la derivada de $y=\left(x-2\right)\sqrt{3-x^2}$

Solución
Hagamos $f(x)=x-2$ entonces $f'(x)=1$; luego,

$$g(x)=\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad g'(x)=\frac{1}{2}\left(3-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right)$$

$$g'\left(x\right)=-\frac{x}{\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Aplicamos la regla del producto

$$\frac{dy}{dx}=\left(x-2\right)\left[-\frac{x}{\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]+\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1\right)$$

$$=\left[\frac{-x^2+2x}{\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]+\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{-x^2+2x+\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-x^2+2x+\left(3-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-x^2+2x+3-x^2}{\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3+2x-2x^2}{\sqrt{3-x^2}}$$

Comprueba tus habilidades

En las ecuaciones siguientes encuentra la derivada utilizando la regla del producto y escribe el resultado en la columna de la derecha.

Ecuación	Derivada
1. $y=(x^2+2)(3x^3-2)$	$\frac{dy}{dx}=$
2. $y=(5x^2+2)(3x^2-2x+7)$	$\frac{dy}{dx}=$
3. $y=(x^4+2)(x^3-2x^2+1)$	$\frac{dy}{dx}=$
4. $y=(x^2-2)^2\sqrt{1+x}$	$\frac{dy}{dx}=$
5. $y=x^2\ \sqrt[3]{x^2+3}$	$\frac{dy}{dx}=$
6. $y=(x^4-1)(x^2+1)$	$\frac{dy}{dx}=$
7. $y=(x^2+1)\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx}=$

Regla para derivar un cociente

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables y $g(x)\neq 0.$ Entonces,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\left[\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$

$$=\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$

$$=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Sugerencia: memoriza la regla del cociente de la siguiente manera:

La derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado.

Ejemplos

1. Encuentra la derivada de $y=\dfrac{3x+5}{\sqrt{3-2x}}$

Solución:

En primer término hagamos $f(x)=3x+5$, entonces $f'(x)=3$; luego:

$$g(x)=\sqrt{3-2x}=(3-2x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad g'(x)=\frac{1}{2}(3-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)$$

$$g(x)'=-\frac{1}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}$$

Aplicamos la regla para derivar un cociente de funciones

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3-2x)^{\frac{1}{2}}(3)-(3x+5)\left[-\frac{1}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}\right]}{\left[\left(3-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}$$

Para resolver la fracción resultante de la derivada multiplicamos y dividimos por $(3-2x)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3)(3-2x)^{\frac{1}{2}}+\frac{3x+5}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}}{3-2x}\left[\frac{\left(3-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(3-2x\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$=\frac{3(3-2x)+3x+5}{(3-2x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9-6x+3x+5}{\sqrt{\left(3-2x\right)^{3}}}$$

$$=\frac{14-3x}{\sqrt{\left(3-2x\right)^{3}}}$$

2. Hallar la derivada de $y=\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$

Solución

En primer lugar hagamos

$$f(x)=(a+bx)^{\frac{1}{2}} \quad \text{entonces} \quad f'(x)=\frac{1}{2}\left(a+bx\right)^{-\frac{1}{2}}\left(b\right)$$

$$=\frac{b}{2\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$g(x)=(a-bx)^{\frac{1}{2}} \quad \text{entonces} \quad g'(x)=\frac{1}{2}\left(a-bx\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-b\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a-bx\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-b\right)$$

$$=\frac{-b}{2\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Aplicamos la regla para derivar cocientes

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{b}{2\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}}-\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{-b}{2\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left[\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

Para resolver la fracción resultante multiplicamos y dividimos por $2(a+bx)^{\frac{1}{2}}\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{b\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}{2\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{b\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}}{2\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}}{a-bx}\left[\frac{2\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}{2\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$=\frac{b(a-bx)+b\left(a+bx\right)}{2\left(a-bx\right)^{\frac{3}{2}}\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{ab-b^2x+ab+b^2x}{2\sqrt{\left(a-bx\right)^3}\sqrt{a+bx}}=\frac{2ab}{2\sqrt{\left(a-bx\right)^3\left(a+bx\right)}}$$

$$=\frac{ab-b^2x+ab+b^2x}{2\sqrt{\left(a-bx\right)^3}\sqrt{a+bx}}=\frac{2ab}{2\sqrt{\left(a-bx\right)^3\left(a+bx\right)}}=\frac{ab}{\sqrt{\left(a-bx\right)^3\left(a+bx\right)}}$$

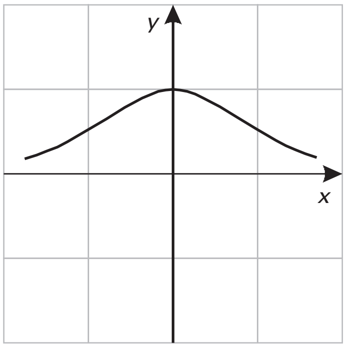
Comprueba tus habilidades

En las ecuaciones siguientes encuentra la derivada utilizando la regla del cociente y escribe el resultado en la columna de la derecha.

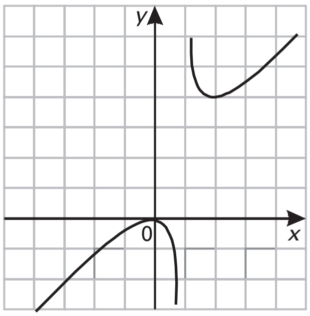
Ecuación	Derivada
1. $y=\dfrac{3x-2}{5-3x}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
2. $y=\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2+3x^2}$	$\dfrac{dy}{dx}=$

3. $y=\dfrac{3x^3-2}{x^2+3}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
4. $y=\dfrac{2x^2-3x+3}{2-3x}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
5. $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+2x-3}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
6. $f(x)=\sqrt{\dfrac{c^2-x^2}{c^2+x^2}}$	$\dfrac{dy}{dx}=$

7. La curva $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ se llama *bruja de María Agnesi*. Encuentra y gráfica la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

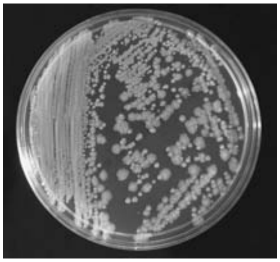


8. ¿En qué puntos tiene tangente horizontal la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$?



9. La función $f(t)=\dfrac{t^2-t+1}{t^2+1}$ mide porcentaje del nivel normal de oxigeno en un estanque, donde t es el tiempo en semanas contando desde que el desecho orgánico se arroja en él. Hallar la razón de cambio de f respecto de t cuando $t=2$.

10. Una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y crece en número de acuerdo con la ecuación $P=500+\dfrac{2000t}{50+t^2}$ con t medido en horas. Hallar la razón de crecimiento de la población cuando $t=2$.



Derivadas de funciones trigonométricas

Reglas para derivar las funciones trigonométricas

1. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}u=\cos u\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d}{dx}\cos u=-\operatorname{sen}u\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{ctg}u=-\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\csc u=-\csc u\operatorname{ctg}u\dfrac{du}{dx}$

Antes de abordar la deducción de algunas reglas para derivar las funciones trigonométricas es importante conocer los límites siguientes:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

Recordemos de nueva cuenta la definición de derivada:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(x+h)}^{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h} - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(-\operatorname{sen} x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

$$= -\operatorname{sen} x\left[\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h}\right] + \cos x\left[\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]$$

$$= (-\operatorname{sen} x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$$

Pero si $y = \operatorname{sen}(u)$ y $u = f(x)$, entonces se presenta otra vez **la regla de la cadena**.

Como $\dfrac{dy}{du} = \cos u$, tenemos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ por tanto

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}$$

Ejemplos

1. Deriva $y = \operatorname{sen}(2x+1)$

Solución

Hagamos $u = 2x+1$, entonces $\dfrac{du}{dx} = 2$ luego

$$\frac{dy}{dx} = \cos(2x+1)(2) = 2\cos(2x+1)$$

2. Deriva $y = \cos x^2$

Solución

Hagamos $u = x^2$, entonces $\dfrac{du}{dx} = 2x$, luego

$$\frac{dy}{dx} = (-\operatorname{sen} x^2)(2x) = -2x\operatorname{sen} x^2$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

3. Demostrar que $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u$

Solución

Derivamos tan u como un cociente utilizando la identidad $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$

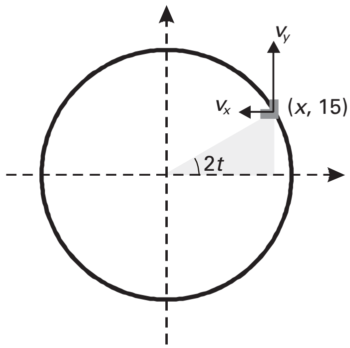
$$\frac{d}{dx}\tan u = \frac{d}{dx}\underbrace{\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}}_{\text{identidad de } \tan u}$$

$$= \frac{\cos u\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u\right) - \operatorname{sen} u\left(\frac{d}{dx}\cos u\right)}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{\cos u \cos u \frac{du}{dx} - \operatorname{sen} u\left(-\operatorname{sen} u\right)\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}^{1}}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 u}}_{\sec^2 u}\frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

4. Una rueda de la fortuna de 30 pies de radio gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad angular $\omega = 2$ rad/seg. ¿Con qué velocidad se eleva verticalmente un asiento en el borde cuando está 15 pies arriba de la línea horizontal que pasa por el centro de la rueda? Recuerda que la velocidad angular ω es el desplazamiento angular θ entre el tiempo t.



Solución

Como $\omega = \frac{\theta}{t}$ entonces $\theta = \omega t = 2t$

Luego en el triángulo de la figura

$$x = 30 \cos 2t \quad \text{y} \quad y = 30 \operatorname{sen} 2t$$

$$\operatorname{sen} \omega = \operatorname{sen} 2t = \frac{15}{30} = 0.5, \text{ por tanto } 2t = 30°$$

La velocidad tangencial de la silla en el punto P tiene dos componentes, una horizontal $v_x = \frac{dx}{dt}$ y otra vertical $v_y = \frac{dy}{dt}$, por cierto ésta última es la que nos interesa calcular.

$$v_y = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(30 \operatorname{sen} 2t\right) = 60 \cos 2t = 60\left(\cos 30°\right) = 51.96 \text{ pies/seg}$$

5. Se aplica una fuerza en el extremo de un resorte horizontal y este se desplaza hacia la derecha 4 cm mas allá de su posición natural o de reposo, en seguida se deja en libertad en el instante $t = 0$, tal como se muestra en la figura. Su posición en el instante t es

$$x = f(t) = 4\cos t.$$

a) Encuentra la velocidad v en el instante t, es decir $v = \frac{dx}{dt}$,

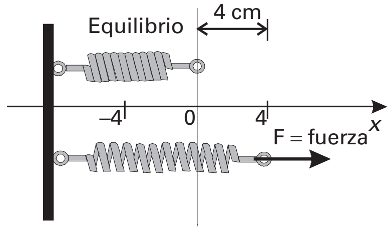
b) halla la posición y la velocidad del extremo del resorte en el instante $t = \frac{2\pi}{3}$

c) las gráficas de posición y velocidad de la vibración en un período de 2π.

Solución

a) La velocidad en el instante t es

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4\cos t\right) = -4\text{sen}\,t$$



b) La posición y la velocidad en $t = \frac{2\pi}{3}$ son respectivamente

$$s = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cos 120^{\circ} = -2$$

$$v = -4\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -3.4641$$

Recordemos que

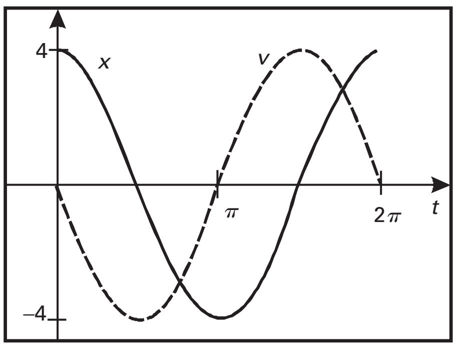
$$\pi \text{ rad} = 180°$$

Por tanto

$$\frac{2\pi}{3}\text{rad} = 120°$$

c) Gráficas de posición y velocidad en un período de 2π

Las gráficas nos enseñan que la oscilación del resorte ocurre desde, –4 el punto más bajo hasta el punto más alto, es decir 4; además de ilustrarnos la relación entre posición y velocidad.



Comprueba tus competencias

En las funciones siguientes encuentra la derivada utilizando la regla correspondiente y escribe el resultado en la columna de la derecha.

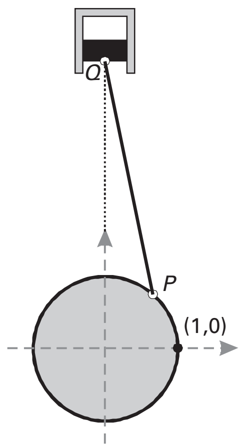
Ecuación	Derivada
1. $y = \operatorname{sen}(2x-3)$	$\dfrac{dy}{dx} =$
2. $y = 4\cos x - 2\operatorname{sen} x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
3. $y = \cos(2-5x)$	$\dfrac{dy}{dx} =$
4. $y = \cos(2-5x)^2$	$\dfrac{dy}{dx} =$
5. $y = \cos^2 x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
6. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
7. $y = \operatorname{sen} x \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
8. $s = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$	$\dfrac{ds}{dt} =$
9. $y = \operatorname{sen} x \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
10. $v = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$	$\dfrac{dv}{du} =$

11. $y = x^2 \tan x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
12. $y = \operatorname{ctg} x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
13. $y = x\,\operatorname{sen}^2 x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
14. $y = \operatorname{sen}^3\left(x^2 + 3\right)$	$\dfrac{dy}{dx} =$
15. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
16. $f(\theta) = \dfrac{\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$	$f'(\theta) =$
17. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$	$\dfrac{dy}{dx} =$
18. $y = \dfrac{1 + \csc x}{1 - \csc x}$	$\dfrac{dy}{dx} =$

19. Observa y analiza la rueda-pistón de la figura. La rueda tiene 1 pie de radio y gira en sentido contrario a las manecillas del reloj 2 rad/seg. La varilla de conexión tiene 5 pies de longitud. Cuando $t = 0$ el punto P está en (1, 0). Encuentra

a) las coordenadas de P en el instante t

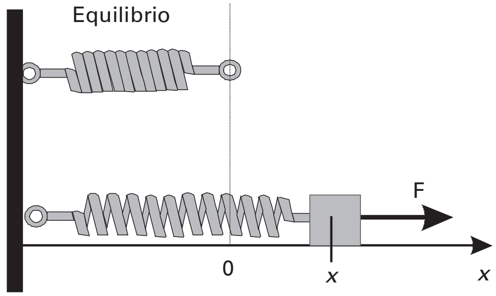
b) la velocidad de Q en el momento t.

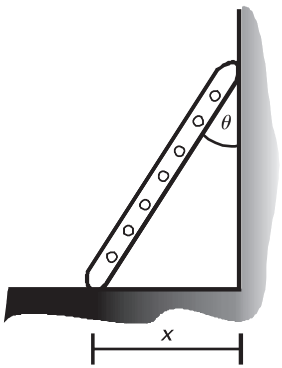


20. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa, en un movimiento armónico simple. Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8 \text{ sen } t$.

a) Encuentra la velocidad y la aceleración en el instante t,

b) Halla la posición y la velocidad de la masa en el instante $t = \dfrac{2\pi}{3}$.





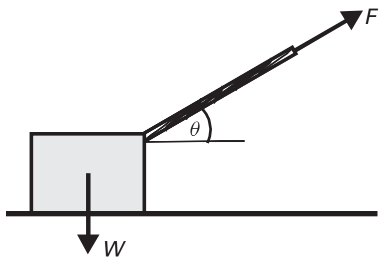
21. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada en una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquella hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x con respecto a θ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$?

22. Un bloque con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza F que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*.

a) Encuentra la razón de cambio de F con respecto a θ.
b) ¿Cuándo es igual a cero esta razón de cambio?
c) Si $W = 50$ libras y $\mu = 0.6$, dibuja la gráfica de F como función de θ utilizando una calculadora que grafique.



Derivadas de funciones trigonométricas inversas

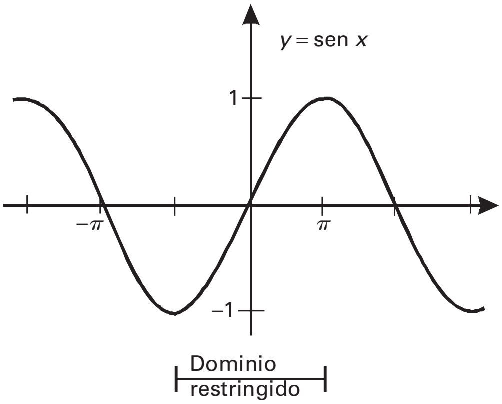
Definición:

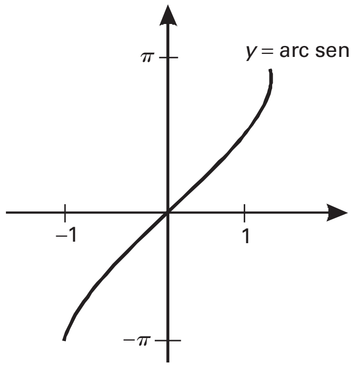
Cuando hablamos de las inversas de las funciones trigonométricas básicas es necesario aclarar que nos estamos refiriendo a los ángulos cuyas funciones trigonométricas son seno, coseno, tangente, etcétera, por ejemplo si:

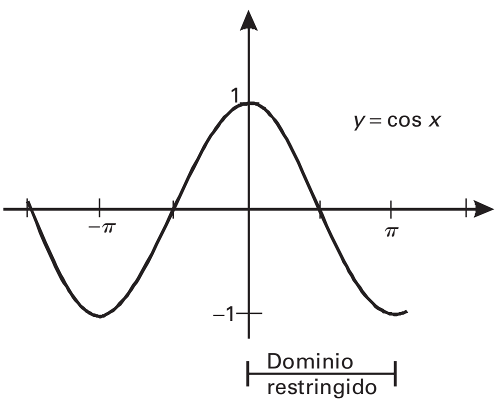
$$y = \operatorname{sen} x, \quad \text{entonces,} \quad x = \operatorname{sen}^{-1} y$$

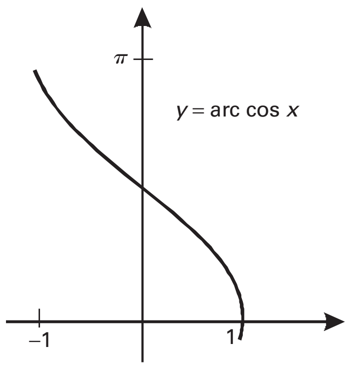
lo cual significa que x es el ángulo cuyo seno es y.

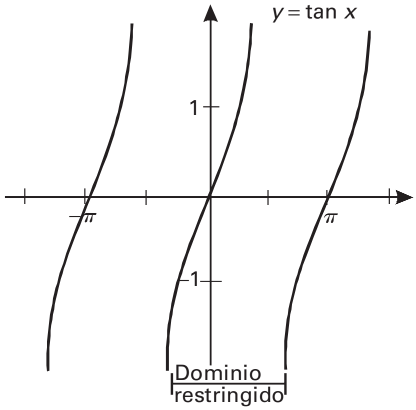
Es importante mencionar que para obtener las inversas de las funciones trigonométricas se restringe el dominio y, el rango se mantiene lo más grande posible según sea la función de que se trate.

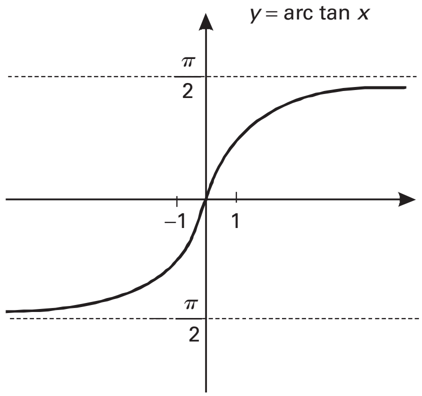












Reglas para derivar las funciones trigonométricas inversas

1. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{ctg}^{-1}u = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1}u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

Demostración de la regla 1:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

Si $y = \operatorname{sen}^{-1}u \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{sen} y$, luego

$$\frac{du}{dy} = \cos y \quad \text{y} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos y}$$

Como $y = f(u)$ y $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos y}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

Demostración de la regla 3:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Si $y = \arctan u \quad \Rightarrow \quad u = \tan y$, luego

$$\frac{du}{dy} = \sec^2 y \quad \text{y} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Como $y = f(u)$ y $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y}\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos

1. Encuentra la derivada de $y = \tan^{-1} 2x^2$

Solución
Hagamos $u = 2x^2$; entonces, $\frac{du}{dx} = 4x$, y mediante la regla 3, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(2x^2\right)^2}(4x) = \frac{4x}{1+4x^4}$$

2. Deriva $y = \sec^{-1} \frac{a}{x}$.

Solución
Hagamos $u = \frac{a}{x} = ax^{-1}$; entonces, $\frac{du}{dx} = -ax^{-2} = -\frac{a}{x^2}$ y mediante la regla 5 se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{a}{x}\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

3. Encuentra la derivada de $y = x\text{sen}^{-1}(2x)$

Solución

Esta función debemos derivarla como un producto

Hagamos $f(x) = x$; $f'(x) = 1$; $g(x) = \text{sen}^{-1}(2x)$ y $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}$;

luego

$$\frac{dy}{dx} = x\left[\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2)\right] + \text{sen}^{-1}(2x)(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right] + \text{sen}^{-1}(2x)$$

Comprueba tus competencias

En las funciones siguientes encuentra la derivada utilizando la regla correspondiente escribiendo el resultado en la columna de la derecha.

Ecuación	Derivada
1. $y = \cos^{-1} 3x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
2. $y = \cot^{-1} ax^2$	$\dfrac{dy}{dx} =$
3. $y = x\csc^{-1} 3x$	$\dfrac{dy}{dx} =$
4. $y = \tan^{-1} \dfrac{a}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} =$
5. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a\ \text{sen}^{-1} \dfrac{x}{a}$	$\dfrac{dy}{dx} =$

Derivadas de funciones implícitas

Hasta aquí, prácticamente hemos estudiado casi todas las funciones que se pueden describir al expresar de *forma explícita* una variable en términos de otra variable. Sin embargo, a veces las funciones están definidas de *manera implícita*, es decir, alguna de sus variables no está despejada. Para mayor comprensión, observa la tabla siguiente .

Función implícita	Función explícita	Derivada
$xy = 2$	$y = \frac{2}{x}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$

El ejemplo nos enseña que es relativamente fácil despejar y de la función *implícita* para así, obtener su derivada. Pero sabemos que a veces en ciertas funciones no se puede despejar la y o es sumamente difícil hacerlo, entonces hay que preguntarse si dichas funciones se pueden *derivar de manera implícita*. La respuesta es sí, y es necesario hacerlo término a término considerando que la ecuación determina a y como función de x.

Ejemplos

1. Hallar la derivada de $x^2 + y^2 = 25$

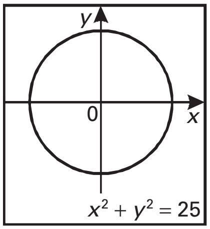
Al derivar término a término tenemos que:

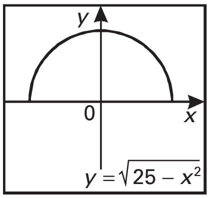
$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

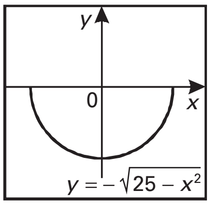




Comprobación del ejemplo 1

Si en el **ejemplo 1** hacemos explícita la función, entonces:

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$



(*Continúa*)

(*Continuación*)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(25-x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left(-2x\right)=-\frac{x}{\left(25-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

Pero si en el denominador sustituimos $\sqrt{25-x^2}$ por y obtenemos el mismo resultado que en el ejemplo 1.

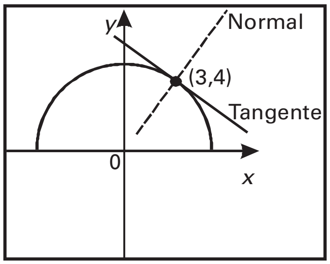
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Ecuaciones de la tangente y de la normal

2. Con relación al **ejemplo 1**, encuentra la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $x^2+y^2=25$ en el punto $\left(3,4\right)$.

Solución
Como la derivada de la función es $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, tenemos que la pendiente en el punto $\left(3,4\right)$ es

$$m=-\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$$



Por tanto, la ecuación de la tangente al círculo en $\left(3,4\right)$ es

$$y-4=-\frac{3}{4}\left(x-3\right) \quad \text{o} \quad 3x+4y=25$$

La recta normal es la perpendicular a la recta tangente en el punto $\left(3,4\right)$, luego su ecuación es

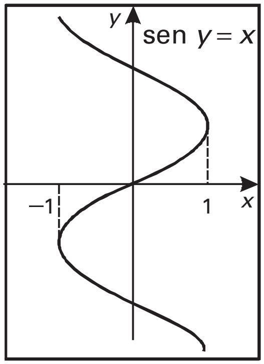
$$y-4=\frac{4}{3}\left(x-3\right) \quad \text{o} \quad 4x-3y=0$$

Recta normal. Recta perpendicular a otra.

Condiciones de perpendicularidad. Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes m_1 y m_2 son recíprocas y de signo contrario.

$$m_1=-\frac{1}{m_2}$$

3. Calcula $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación sen $y = x$



$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{dx}{dx}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

4. Deriva $x^3 - xy + y^2 = 9$

$$3x^2 - \left(\underbrace{x\frac{dy}{dx} + y(1)}_{\text{derivada del producto } xy} \right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - x\frac{dy}{dx} - 2y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$ Igualando a cero

$$\frac{dy}{dx}(-x + 2y) = 2y - 3x^2$$ Trasponiendo términos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{2y - x}$$

Comprueba tus habilidades

En las igualdades siguientes encuentra la derivada $\frac{dy}{dx}$ de manera implícita, escribiendo el resultado en la columna de la derecha.

Ecuación	Derivada
1. $x^2 - y^2 = 16$	$\frac{dy}{dx} =$
2. $x^2 - y^3 = 0$	$\frac{dy}{dx} =$

(*Continúa*)

3. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9$	$\frac{dy}{dx}=$
4. $x^2+y^2=2$	$\frac{dy}{dx}=$
5. $y^3-y=x$	$\frac{dy}{dx}=$
6. $\sqrt{y}=x-2y$	$\frac{dy}{dx}=$
7. $x^2y+y^2x=-2$	$\frac{dy}{dx}=$
8. $y^2=\frac{x^2-9}{x^2+9}$	$\frac{dy}{dx}=$
9. $(x+y)^3=x^3+y^3$	$\frac{dy}{dx}=$
10. $x^3y^3-y=x$	$\frac{dy}{dx}=$
11. $\sqrt{xy}=x-2y$	$\frac{dy}{dx}=$
12. $\operatorname{sen} x \cos y=1$	$\frac{dy}{dx}=$
13. $e^{x\,y}+y=3$	$\frac{dy}{dx}=$

Ejemplos de aplicaciones

1. Se deja caer una roca sobre un estanque en reposo y, al hacerlo, produce ondas circulares concéntricas. El radio de la onda exterior crece al ritmo constante de 1 pies/seg. Cuando su radio es 3 pies, ¿a qué ritmo está creciendo el área A de la zona perturbada?

Solución
El área de la onda es: $A = \pi r^2$.

El crecimiento del radio es: $\frac{dr}{dt} = 1$ pies/seg, cuando $r = 3$

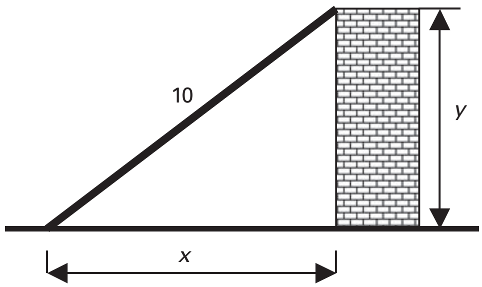
En estos casos la variable independiente es el tiempo t, de manera que hay que derivar la variable área A con respecto al tiempo
El crecimiento del área es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\pi\, r^2\right) = 2\pi\, r\frac{dr}{dt}, \quad \text{luego, si } r = 3\text{, entonces:}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(3)(1) = 6\pi\ \frac{\text{pies}^2}{\text{seg}}$$

2. Suponer que la escalera de la figura se está deslizando sobre el piso a razón de 3 pies/seg. ¿A qué velocidad se desliza la parte de arriba de la escalera en el momento en que la base está a 8 pies del muro? Es decir, ¿cuál es el valor de $\frac{dy}{dt}$ cuando $\frac{dx}{dt} = 3$ y $x = 8$?

Solución
El teorema de Pitágoras nos da la relación:



$$x^2 + y^2 = 10^2\text{, de donde } y = \sqrt{100 - x^2}$$

Si derivamos $x^2 + y^2 = 10^2$ con respecto al tiempo,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Al despejar

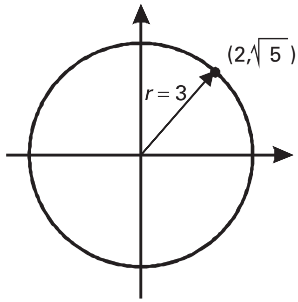
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Al sustituir

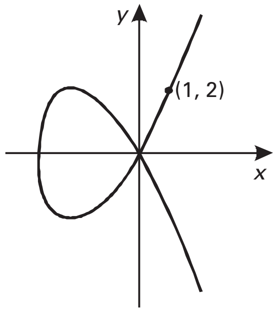
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{\sqrt{100 - 8^2}}(3) = -4 \text{ pies por segundo.}$$

Verifica tus competencias

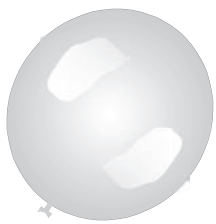
1. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal al círculo $x^2 + y^2 = 9$ en el punto $\left(2, \sqrt{5}\right)$. La **recta normal** en un punto es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.



2. La curva $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama cúbica de Tschirnhausen. Encuentra y dibuja las ecuaciones de la tangente y la normal en el punto $\left(1, 2\right)$.



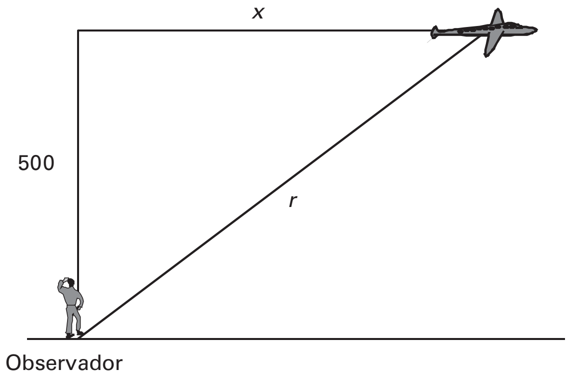
3. Se bombea aire en un globo esférico a razón de 4.5 pulgadas cúbicas por minuto. Hallar la razón de cambio del radio cuando éste es de 2 pulgadas.



4. Un aeroplano viajando a 390 pies por segundo a una altitud de 5 000 pies vuela directamente sobre un observador como se muestra en la figura.

a) Encuentra una ecuación que relacione a x y r

b) Hallar el valor de x cuando r es 13 000 *c*) ¿A qué velocidad está cambiando la distancia r entre el aeroplano y el observador cuando el aeroplano está a 13 000 pies del observador? Es decir, ¿cuánto vale $\frac{dr}{dt}$ cuando $\frac{dx}{dt} = 390$ y $r = 13\,000$?



Derivada de funciones logarítmicas

Cuando estudiamos las funciones exponenciales, mencionamos que $e = 2.71828181$ es un número irracional que aparece de manera natural en fenómenos físicos, biológicos, sociales económicos, etcétera, y que se define como:

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0}\left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = 2.71828181$$

Derivada de $\log_a u$

La derivada del logaritmo de base a de u con respecto a x es:

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Demostración;

Si $y = \log_a u$ y $u = f(x)$, entonces

$$y + \Delta y = \log_a\left(u + \Delta u\right)$$

$$\Delta y = \log_a\left(u + \Delta u\right) - \log_a u = \log_a \frac{u + \Delta u}{u}$$

(Recuerda las propiedades de los logaritmos).

Propiedades de los logaritmos

1. $\log(ab) = \log a + \log b$

2. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

3. $\log a^n = n \log a$

Luego, si multiplicamos el segundo miembro de la igualdad por 1, pero escrito como $\frac{\Delta u}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u}$, tenemos

$$\Delta y = \log_a \frac{u+\Delta u}{u} \; \frac{\Delta u}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \quad \text{y si dividimos por } \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u}{\Delta u} \log_a \frac{u+\Delta u}{u} \cdot \frac{\Delta u}{u \Delta x} = \log_a \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} \cdot \frac{\Delta u}{u \Delta x}$$

(otra propiedad de los logaritmos)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} \right] \frac{1}{u} \lim_{\Delta x \to 0} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplos

1. Encuentra la derivada de $y = \log(3x)$

Solución

Hagamos $u = 3x$; luego $\frac{du}{dx} = 3$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{3x}(3) = \frac{\log e}{x}$$

2. Halla la derivada de $y = \log(2-3x)$

Solución

Hagamos $u = 2 - 3x$; luego $\frac{du}{dx} = -3$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{2-3x}(-3) = \frac{-3\log e}{2-3x}$$

Derivada de la función logaritmo natural

La derivada de $y = \ln u$ es:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Demostración:

Recordemos que:

$$\log_e u = \ln u$$

Luego si recurrimos a la derivada de los logaritmos de base a:

$$\frac{d}{dx}\log_e u = \frac{\log_e e}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos

1. Deriva $y = \ln(2-3x)$

Solución

Hagamos $u = 2 - 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3$, luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2-3x}(-3) = -\frac{3}{2-3x}$$

Ejemplo 2. Deriva $y = x\ln x$

Solución

Aquí debemos derivar como producto, entonces hagamos:

$$f(x) = x;\ f'(x) = 1 \text{ y } g(x) = \ln x;\text{ luego } g'(x) = \frac{1}{x}$$

Por tanto

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(1) = 1 + \ln x$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Ejemplo 2. Derivar $f(x) = \ln\sqrt[3]{1-x^2}$

Solución

Primero aplicamos las propiedades de los logaritmos

$$f(x) = \ln\sqrt[3]{1-x^2} = \ln\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left(1-x^2\right),$$

al aplicar $\log a^n = n\log a$

Esta última expresión es más sencilla de derivar

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-x^2}(-2x)\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}\left[\frac{-2x}{1-x^2}\right]$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{2x}{3\left(1-x^2\right)}$$

Comprueba tus habilidades

En las igualdades siguientes encuentra la derivada $\frac{dy}{dx}$, escribiendo el resultado en la columna de la derecha.

Ecuación	Derivada
1. $y = \ln\left(1-x^2\right)$	$\frac{dy}{dx} =$
2. $y = \ln\sqrt{x^4-4x}$	$\frac{dy}{dx} =$
3. $y = \left(\ln x\right)^3$	$\frac{dy}{dx} =$

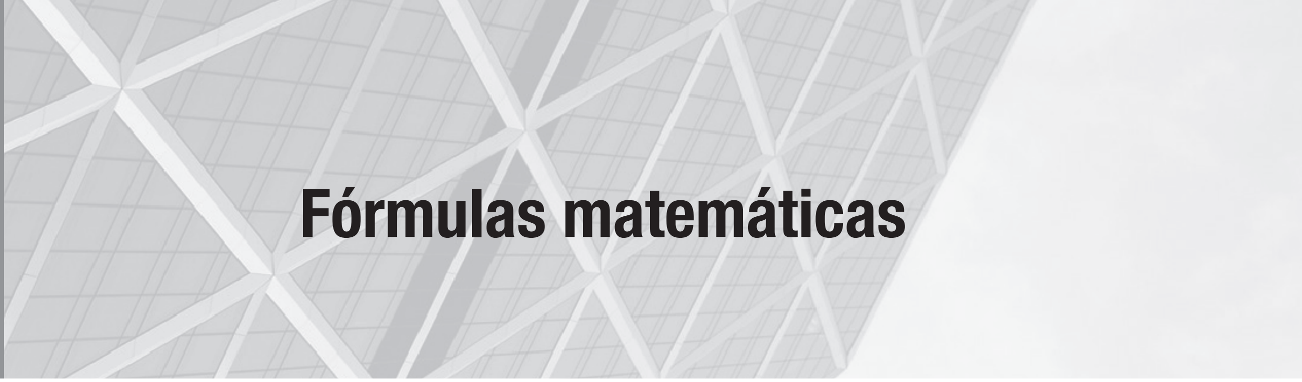
4. $y=\ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$	$\dfrac{dy}{dx}=$
5. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
6. $y=\ln(\operatorname{sen} x)$	$\dfrac{dy}{dx}=$
7. $y=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
8. $y=\ln\dfrac{\operatorname{sen} x-1}{\operatorname{sen} x+2}$	$\dfrac{dy}{dx}=$
9. $y=\ln'\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$\dfrac{dy}{dx}=$
10. $y=\dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}$	$\dfrac{dy}{dx}=$

Registro personal de avance y aprovechamiento

Nombre del alumno: ______________________________

Grupo: ______________ **Turno:** ______________

Actividad	Valor	Porcentajes por bloque				Calificaciones		
		B-1	B-2	B-3	B-4	Parciales		Final
Tareas								
Trabajo colaborativo								
Autoevaluación y coevaluación								
Exámenes objetivos								
Total	**100%**							



Fórmulas matemáticas

ÁLGEBRA

OPERACIONES ARITMÉTICAS			
$a(b+c) = ab + ac$	$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$	$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

EXPONENTES Y RADICALES			
$a^m\, a^n = a^{mn}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$(ab)^n = a^n\, b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$		$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

FACTORIZACIONES ESPECIALES		
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

PRODUCTOS NOTABLES	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}b^n$$

donde $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ y $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$

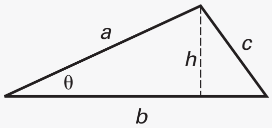
FÓRMULA CUADRÁTICA	VALOR ABSOLUTO
Si $ax^2 + bx + c = 0$, la solución para x es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Para toda $a > 0$, entonces $\lvert x\rvert = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$ $\lvert x\rvert < a$ significa que $-a < x < a$ $\lvert x\rvert > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$

GEOMETRÍA BÁSICA

FIGURAS GEOMÉTRICAS ELEMENTALES

Triángulos

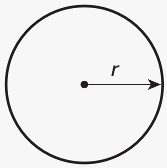
Área $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\;\theta$



Círculos

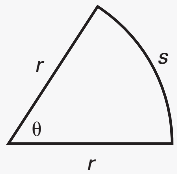
Área $= \pi r^2$

Perímetro $= 2\pi r$



Sector de círculos

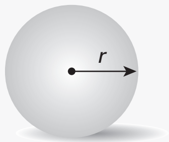
Área $= \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$



Esfera

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

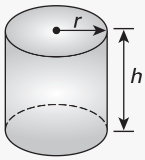
Área $= 4\pi r^2$



Cilindro

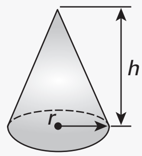
Área $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

Volumen $= \pi r^2 h$



Cono

Volumen $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

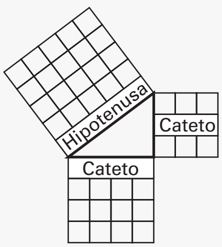


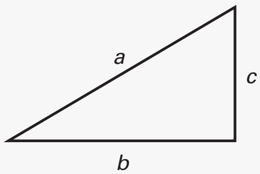
TRIGONOMETRÍA

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2 $\qquad b^2 + c^2 = a^2$

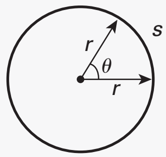




SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

$180° = \pi$ radianes

$s = r\theta$ (θ medido en radianes)

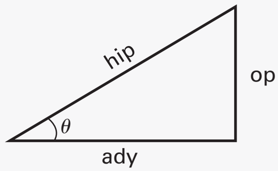


DEFINICIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\text{sen } \theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$ $\cos \theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$

$\tan \theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}}$ $\cot \theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$

$\sec \theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$ $\csc \theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$



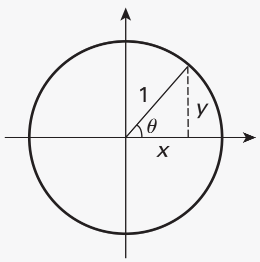
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

$x^2 + y^2 = 1$

$\text{sen } \theta = \dfrac{y}{1} = y$

$\cos \theta = \dfrac{x}{1} = x$

$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$



LEYES DE SENOS Y COSENOS

Ley de senos. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

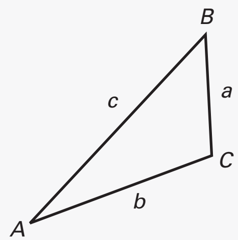
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Ley de cosenos. El coseno de un ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman menos el cuadrado del lado opuesto, todo dividido entre dos veces el producto de los lados que lo forman

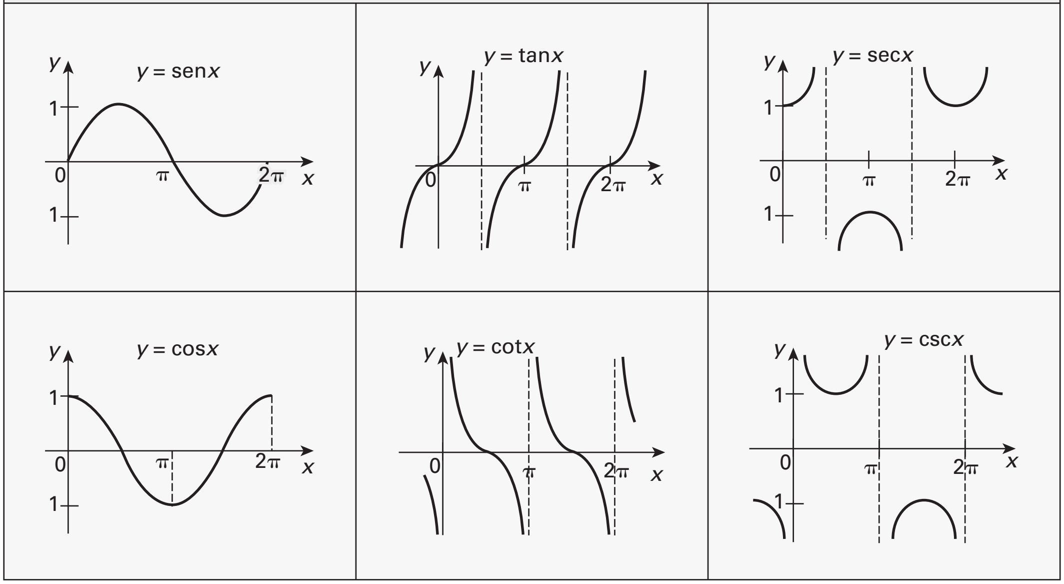
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	$\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	
$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$	$\csc^2\theta = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta$	$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta)$	
$\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$	$\tan\theta = \operatorname{ctg}(90° - \theta)$	$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

FÓRMULAS DE ÁNGULOS DOBLES

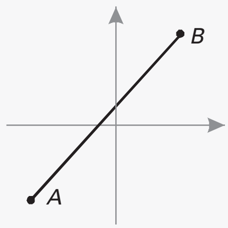
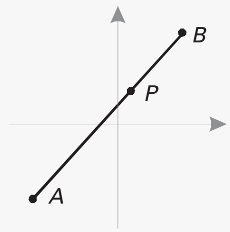
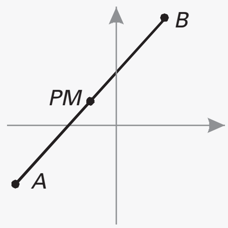
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

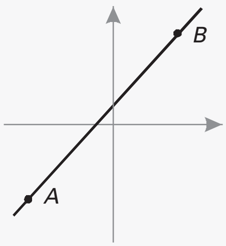
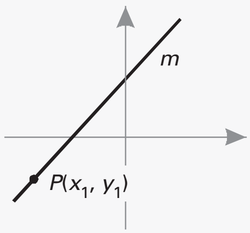
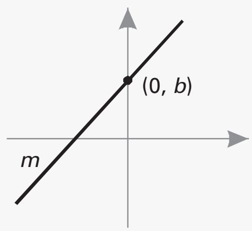
FÓRMULAS DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS	
$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$
$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y$	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$
$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$	$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

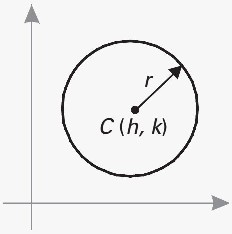
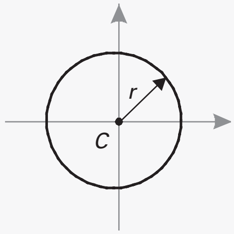
FÓRMULAS DE MEDIO ÁNGULO	
$\operatorname{sen}^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS	
$y=\operatorname{sen}x \quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{sen}^{-1}y$	$y=\cos x \quad\Rightarrow\quad x=\cos^{-1}y$
$y=\tan x \quad\Rightarrow\quad x=\tan^{-1}y$	$y=\operatorname{ctg}x \quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{ctg}^{-1}y$
$y=\sec x \quad\Rightarrow\quad x=\sec^{-1}y$	$y=\csc x \quad\Rightarrow\quad x=\csc^{-1}y$

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

Distancia de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$	**División de un segmento AB en una razón r**	
$d = \lvert AB \rvert = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$ 	$r \neq 1$ $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$; $y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$ 	Punto medio $r = 1$ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ 

Pendiente de la recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$	**Ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m**	**Ecuación de la recta de pendiente m y ordenada en el origen b**
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 	$y - y_1 = m(x - x_1)$ 	$y = mx + b$ 

<table>
<tr><th colspan="2">CÍRCULOS</th></tr>
<tr><td>Ecuación del círculo con centro en (h, k) y radio r.
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

</td><td>Ecuación del círculo con centro en el origen y radio r.
$x^2 + y^2 = r^2$

</td></tr>
</table>

CÁLCULO DIFERENCIAL

DEFINICIÓN DE DERIVADA
$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} = m_{\tan}$ donde $m_{\tan}$ es la pendiente de la tangente a $f(x)$ en un punto

DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS		
$\frac{d}{dx}c = 0$	$\frac{d}{dx}x = 1$	$\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$
$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)-\frac{d}{dx}h(x)$		$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$		$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$
Ciertos autores utilizan $u = f(x)$ y $v = g(x)$, por tanto $\frac{du}{dx} = f'(x)$ y $\frac{dv}{dx} = g'(x)$		

DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES			
$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{d}{dx}u$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS		
$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}u = \cos u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen}u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx}ctgu = -\csc^2 u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u ctgu\frac{d}{dx}u$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS		
$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}u$
$\frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}u$	$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,csc} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}u$
En la actualidad generalmente para escribir las funciones anteriores se utiliza la siguiente notación $\operatorname{sen}^{-1}u,\ \cos^{-1}u,\ \tan^{-1}u,\ ctg^{-1}u,\ \sec^{-1}u,\ \csc^{-1}u$		

CÁLCULO INTEGRAL

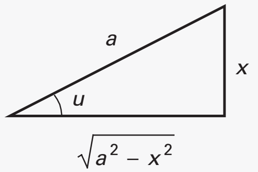
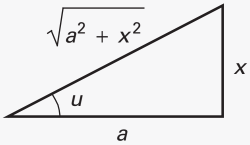
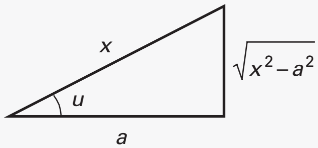
DEFINICIÓN DE INTEGRAL	
Integral indefinida $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$	Integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

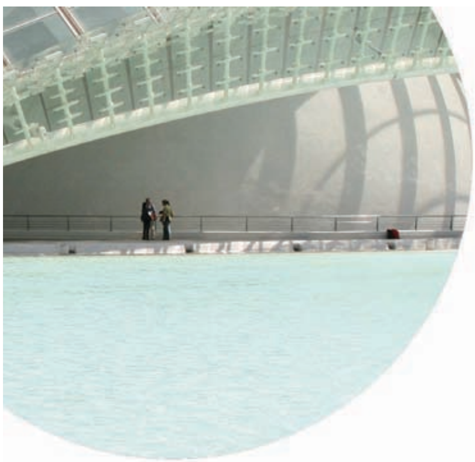
INTEGRALES ELEMENTALES		
$\int dx = x + C$	$\int c\,du = c\int du$	$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
$\int u^n\,dv = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int \dfrac{du}{u} = \ln u + C$	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
$\int e^u\,du = e^u + C$	$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$	$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$	$\int \csc^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C$	$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
$\int \csc u \operatorname{ctg} u\,du = -\csc u + C$	$\int \tan u\,du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$	$\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + C$

$\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	$\int \csc u\,du = \ln\lvert\csc u - ctgu\rvert + C$
$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a} + C$	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{u-a}{u+a} + C$
$\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+u}{a-u} + C$	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\dfrac{u}{a} + C$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,dv = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{u}{a} + C$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA		
Expresión	**Sustitución**	**Justificación**
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}\,u$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos u$	
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan u$ $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec u$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec u$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan u$	



El contenido temático de este libro está diseñado para cumplir con los requisitos de un curso de matemáticas básicas, en lo que respecta a los conceptos de cálculo diferencial, de acuerdo con el plan de estudios del Bachillerato General.

Este libro se enfoca fundamentalmente en el desarrollo de las **competencias** que deben caracterizar a un estudiante del nivel medio superior, como eje principal en su formación educativa. De esta forma, la presente obra contribuye a desarrollar los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que distinguirán al alumno al concluir el estudio de la asignatura de ***Matemáticas V*** y que perdurarán a lo largo de su vida.

Además esta obra servirá para apoyar y facilitar la gran tarea que realizan los docentes durante el curso para desarrollar y ejecutar una mejor planeación de los materiales didácticos, en función del tiempo y de las necesidades institucionales y sociales. Este libro, sin duda, ayudará tanto a los profesores como a los alumnos a cosechar los mejores frutos de su trabajo.

ISBN 978-607-32-0692-1

PEARSON

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net